מתמטיקה לפיזיקאים

פרופ' שלמה הבלין

המחלקה לפיזיקה - אוניברסיטת בר-אילן

אדר תשנ"ט מרץ 1999

מתמטיקה לפיזיקאים

המתמטיקה היא השפה של כל המדעים. קורס זה אמור לתת לתלמיד בסיס מתמטי לצורך הבנת הפיזיקה וכל שטחי המדע. לצורך זה נביא בעיקר את החלק השימושי של המתמטיקה. נדלג בהרבה מקרים על הוכחות. נביא הוכחות רק באותם מקרים שהם הכרחיים להבנה ולהעמקה בנושא. נשים דגש רב על אינטואיציה מתמטית, תכונה החשובה מאוד לחוקרים במדעים השונים. ברצוני להודות לד״ר מאיר לבקוביץ, נחמיה שוורץ ויוסי אשכנזי על הערותיהם המועילות.

ספרות:

א. חשבון אינפיניטסימלי - פרנק איירס (Ayres) הוצאת סטימצקי.

ב. חשבון אינפיניטסימלי מתקדם - שפיגל- הוצאת סטימצקי.

ג. Advanced Calculus של Spiegel בהוצאת Schaum (זהו ספר טוב עם רקע מתמטי תאורטי רחב יותר. תורגם גם לעברית - סעיף ב׳ לעיל).

ד. Piskunov - Differential and Integral Calculus. תורגם מרוסית לאנגלית. בארץ יצא בהוצאת Safrina.

ה. Calculus, F. Sherwood & A. E. Taylor - NY Prentice-Hall

ו. Calculus, H.M. Bacon, McGraw-Hill

ז. Calculus, H.P. Greenspan and D.J. Benny, McGraw-Hill

ח. Mathematical Methods in the Physical Sciences, M.L.Boas, Wiley

ט. Calculus, Howard Anton (Princton, 1997)

אדר תשנ"ט   מרץ 1999

תוכן עניינים

אדר תשנ"ט   מרץ 1999

נספחים:

<u>מתמטיקה לפיזיקאים</u>

1.<u>קבוצות ומספרים</u>

<u>1.1. קבוצות</u>

מושג **הקבוצה** או **אוסף** עצמים בעלי תכונות נתונות הוא מושג יסודי במתימטיקה. למשל קבוצת כל הסטודנטים הלומדים פיסיקה. העצמים הבודדים של קבוצה קרויים **אברים** או **אלמנטים**.

כל חלק של קבוצה קרוי **תת-קבוצה** של הקבוצה הנתונה. למשל התלמידים הלומדים פיסיקה ומדעי המחשב הם תת קבוצה של קבוצת הלומדים פיסיקה. הקבוצה שאינה מכילה שום איבר נקראת **קבוצה ריקה** או קבוצת **האפס**.

<u>1.2. מספרים ממשיים</u>

המספרים הממשיים מתחלקים לפי הסוגים הבאים:

א. **מספרים טבעיים -** קבוצת המספרים $1,2,3,4,...$ נקראת קבוצת המספרים הטבעיים או **שלמים חיוביים**. מספרים אלו משמשים לספירת **אברי הקבוצה**.
הסכום $a+b$ והמכפלה ab של שני מספרים טבעיים גם הם טבעיים. קבוצה המקיימת תכונה זו נקראת **סגורה** תחת פעולות החיבור והכפל.

ב. **שלמים שליליים ואפס -** קבוצת המספרים $0,-1,-2,-3,-4,...$ נקראת קבוצת השלמים והאפס. מספרים אלה הוגדרו על מנת לאפשר פתרון משוואות מהסוג $x+a=b$ כאשר a ו-b הם מספרים טבעיים כלשהם. לדוגמה עבור $a=5$, ו- $b=2$ אין פתרון למשוואה במסגרת המספרים הטבעיים ואז מגדירים: $x=b-a=2-5=-3$.

- קבוצת המספרים הטבעיים, השלמים השליליים והאפס נקראת קבוצת **השלמים**.

ג. **מספרים רציונליים** או שברים מוגדרים כמנה של שני מספרים שלמים כגון: $\frac{2}{3},\frac{-3}{7}$. מספרים אלה הוגדרו על מנת לאפשר פתרון של משוואות מהצורה $bx=a$ עבור כל a ו-b שלמים (כאשר $b\neq 0$)
ואנו כותבים $x=\frac{a}{b}$ כאשר a נקרא מונה ו-b נקרא מכנה.
קבוצת השלמים היא תת-קבוצה של המספרים הרציונליים, שכן השלמים מתאימים למספרים רציונליים עם $b=1$.

ד. **מספרים אי-רציונליים.** למשל $\sqrt{2}$, π הם מספרים שאינם רציונליים - היינו שלא ניתן להביעם כמנה $\frac{a}{b}$ כאשר a ו-b שלמים ו- $b\neq 0$.

- קבוצת המספרים הרציונליים והאי-רציונליים נקראת קבוצת **המספרים הממשיים**.

תרגיל: הוכח כי $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ אינם רציונליים!

<u>1.3. הצגה עשרונית של מספרים ממשיים</u>

כל מספר ממשי ניתן להצגה בצורה עשרונית. עבור מספר רציונלי הפיתוח העשרוני הוא סופי או אינסופי מחזורי דהיינו ספרה אחת או קבוצת ספרות חוזרת על עצמה החל ממקום מסוים.

לדוגמא: $\frac{1}{6}=0.166666...=0.166\mathring{6}$.

במקרה של מספר אי-רציונלי הפתוח העשרוני הוא אינסופי ללא מחזוריות כלשהיא.

למשל: $\sqrt{2}=1.414213562...$

הכתיבה העשרונית מנצלת 10 ספרות. למשל: $365 = 3\cdot10^2 + 6\cdot10^1 + 5\cdot10^0$. ישנן שיטות ספירה בעלות מספר שונה של ספרות. לדוגמא השיטה הבינרית משתמשת ב-2 ספרות בלבד - 0 ו-1.
למשל לפי הכתיבה הבינרית המספר 11011 משמעותו בכתיבה שלנו:

$$1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 27_{10}$$

שזה גם: $27_{10} = 2\cdot10^1 + 7\cdot10^0$.

תרגיל: עבור מכתיבה עשרונית לכתיבה בינרית של המספרים הבאים: 56 63. עבור מכתיבה בינרית לכתיבה עשרונית של המספרים הבאים: 11 101.

1.4. קבוצות נקודתיות, אינטרוולים

קבוצת נקודות (מספרים ממשיים) הנמצאות על הישר הממשי קרויה קבוצה נקודתית חד ממדית. קבוצת הנקודות x המקיימות $a \le x \le b$ נקראת אינטרוול סגור ומסומנת [a,b]. הקבוצה $a < x < b$ נקראת אינטרוול פתוח ומסומנת (a,b). הקבוצות (a,b] או [a,b) קרויות אינטרוולים פתוחים למחצה או סגורים למחצה.

הסימן x היכול לייצג כל מספר בקבוצה נקרא משתנה. a ו-b קבועים.

1.5. מניה

קבוצה תיקרא בת מניה אם ניתן להתאים את איבריה בהתאמה חד חד ערכית לקבוצת מספרים הטבעיים. (לכל איבר מתאים מספר אחד ולהיפך).

דוגמה:

א. המספרים הטבעיים הזוגיים ...,2,4,6,8 מהווים קבוצה בת מניה עקב ההתאמה החד-חד ערכית הבאה:

הקבוצה הנתונה	$2\ 4\ 6\ 8 \ldots$
	$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$
המספרים הטבעיים	$1\ 2\ 3\ 4 \ldots$

ב. קבוצת המספרים הרציונליים בין 0 ו-1 (כולל 0 ו-1) היא בת מניה.

נכתוב לפי הסדר הבא:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

כלומר נכתוב תחילה את כל השברים שמכניהם 2 ואח"כ את כל השברים שמכניהם 3 וכו'. כאשר שברים זהים נכתבים רק פעם אחת.

לכן קבוצת כל המספרים הרציונליים בין 0 ל-1 היא בת מניה.

קבוצה תיקרא אינסופית אם ניתן להתאימה בהתאמה חד חד ערכית עם תת קבוצה שלה. קבוצה אינסופית שהיא בת מניה תיקרא אינסופית בת מניה. קבוצת המספרים הרציונליים היא אינסופית בת מניה, בעוד קבוצת המספרים האי-רציונליים או כל המספרים הממשיים היא אינסופית ואינה בת מניה.

1.6. ערך מוחלט

הסימון $|a|$ נקרא ערך מוחלט של a ומשמעותו - אם $a > 0 \quad |a| = a$, ואם $a < 0 \quad |a| = -a$.

לדוגמה:

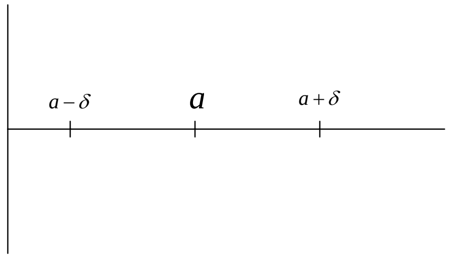
$$|7| = 7$$

$$|-5| = 5$$

תרגיל: פתור משוואות ואי-שוויונים עם ערך מוחלט: $|x^2 - 7| = 2$, $|1 - x^2| \le 3$.

1.7. **סביבות** - קבוצת כל הנקודות x המקיימות $|x-a|<\delta$

כאשר $\delta > 0$ קרויה **סביבת** δ של הנקודה a. קבוצת כל הנקודות x המקיימות $0<|x-a|<\delta$ ובה לא מופיעה הנק' $x=a$ קרויה **סביבת** δ **משמטת** של a.



איור 1.1

1.8. נקודת הצטברות

נקודת **הצטברות** או נקודת **גבול** של קבוצת מספרים היא הנקודה L כאשר בכל סביבת δ משמטת של L ישנם איברים של הקבוצה. כלומר, לכל $\delta > 0$, קטן כרצוננו, נוכל תמיד למצוא איבר x של הקבוצה שאיננו L אבל מקיים $|x-L|<\delta$.

לקבוצה סופית אין נקודת גבול. לקבוצה אינסופית אין בהכרח נקודת גבול. למשל, לקבוצת המספרים הטבעיים אין נקודת גבול, ולקבוצת המספרים הרציונליים יש אינסוף נקודות גבול. קבוצה המכילה את כל נקודות הגבול שלה נקראת **קבוצה סגורה.**

1.9. חסמים

אם עבור המספרים x בקבוצה ישנו מספר M כך ש $x \le M$ לכל x, אנו אומרים שהקבוצה **חסומה מלמעלה** ו-M נקרא **חסם מלעיל**. באופן דומה, אם $x \ge m$ לכל x, הקבוצה חסומה מלמטה ו-m הוא **חסם מלרע**.

אם לכל x קיים $m \le x \le M$, הקבוצה נקראת **חסומה**. אם M הוא מספר כזה שהוא חסם מלעיל אבל יש לפחות איבר אחד הגדול מ- $M-\varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ וקטן כרצוננו אזי M יקרא **חסם עליון** של הקבוצה. באופן דומה אם אין בקבוצה איבר קטן מ-m אולם לפחות איבר אחד קטן מ- $m+\varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ יקרא m **חסם תחתון** של הקבוצה.

דוגמה:

א. הוכח כי קבוצת המספרים האינסופית : $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\ldots$ היא חסומה.

מאחר וכל איברי הקבוצה קטנים מ2- וגדולים מ- 1- (למשל) הסדרה חסומה. 2 הוא חסם מלעיל ו- -1 - הוא חסם מלרע.

חסמים נוספים: חסם מלעיל - $1,\frac{3}{2}$ חסם מלרע - $0,-\frac{1}{2}$

ב. קבע את החסם העליון ואת החסם התחתון של הקבוצה הנ"ל.

מכיוון שאין איבר של הקבוצה שהוא גדול מ1- ומאחר ויש לפחות איבר אחד (היינו 1) העולה על $1-\varepsilon$ לכל ε חיובי, לכן 1 יהיה חסם עליון של הקבוצה. מכיוון שאין איבר של הקבוצה שהוא קטן מ0- ומאחר ויש לפחות איבר אחד של הקבוצה שהוא קטן מ- $0+\varepsilon$ (תמיד נוכל לבחור איבר $\frac{1}{n}<\varepsilon$ או $n>\frac{1}{\varepsilon}$) אנו רואים ש0- הוא החסם התחתון של הקבוצה.

ג. הוכח כי 0 היא נקודת הצטברות של הסדרה.

ע"מ להוכיח ש0- היא נק' הצטברות של הסדרה צריך להוכיח שלכל $\delta > 0$ קיים $|x-0|<\delta$ ואמנם, לכל δ שנבחר נוכל למצוא $x=\frac{1}{n}<\delta$ (עבור $n>\frac{1}{\delta}$ קיים הנ"ל) ולכן 0 היא נקודת הצטברות של הקבוצה.

במלים אחרות, בכל סביבת δ משמטת של 0 יש איברים של הקבוצה לכל $\delta > 0$ קטן כרצוננו.

ד. האם הקבוצה הנ"ל סגורה?

הקבוצה איננה סגורה שכן נקודת ההצטברות 0 אינה שייכת לקבוצה.

1.10. משפט בולצנו וויירשטרס (ללא הוכחה)

לכל קבוצה אינסופית וחסומה יש לפחות נקודת הצטברות אחת.

לדוגמה, הסדרה : $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\ldots$

1.11. מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים- חלוקה אחרת של קבוצת המספרים הממשיים היא חלוקה לתת-הקבוצות: אלגבריים וטרנצנדנטיים.

מספר ממשי x שהוא פתרון **המשוואה הפולינומיאלית**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

כאשר $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ הם שלמים, $a_n \neq 0$, וכן n טבעי, הוא מספר **אלגברי.**

n - **דרגת המשוואה**

מספר שאינו יכול להיות מבוטא כפתרון של משוואה פולינומיאלית קרוי **מספר טרנסצנדנטי**.

דוגמאות: $5x-7=0$ $x=\frac{7}{5}$ מספר אלגברי

$x^2-2=0$ $x=\sqrt{2}$ מספר אלגברי

משפט: המספרים הרציונליים הם תת-קבוצה של קבוצת המספרים האלגבריים.

הוכחה: המספרים הרציונליים הם פתרונות של המשוואה האלגברית $a_1 x + a_0 = 0$

ניתן להוכיח שהמספרים π ו-e הם טרנסצנדנטיים. לא ידוע עדיין אם מספרים מסוימים הם אלגבריים, למשל πe.

ניתן להוכיח שקבוצת המספרים האלגבריים היא אינסופית בת מניה, וקבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים היא אינסופית ואינה בת מניה.

1.12. מספרים מרוכבים:

נתבונן במשוואה $x^2+1=0$. מכיוון שאין שום מספר ממשי המקיים משוואה זו או משוואות דומות, הוסיפו למתמטיקה את קבוצת המספרים המרוכבים.

למספר מרוכב הצורה $a+ib$ כאשר a ו-b הם מספרים ממשיים הקרויים החלק **הממשי** והחלק **המדומה**, ו- $i \equiv \sqrt{-1}$ הוא ***היחידה המדומה***.

שני מספרים מרוכבים $a+ib$ ו- $c+id$ שווים אם ורק אם $a=c$ ו- $b=d$.

אין הגדרת אי-שוויונים במספרים מרוכבים.

נוכל לראות את המספרים הממשיים כתת-קבוצה של המרוכבים כאשר b=0.

הערך המוחלט של $a+ib$ מוגדר כ- $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

שים לב: אם $b=0$ הערך המוחלט מקבל אותה הגדרה כמו במספרים ממשיים.

הצמוד המרוכב של $z=a+ib$ מוגדר כ-$a-ib$ ומסומן ב- z^* או $\bar{z}$.

נהוג לסמן מספר מרוכב גם בצורה הבאה: (a,b).

את פעולות החשבון במספרים מרוכבים מבצעים כמו באלגברה של מספרים ממשיים, כאשר מציבים $i^2=-1$ בכל מקום שזה דרוש.

דוגמאות:

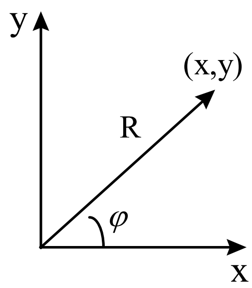
$$(8+7i)-(15-9i) = -7+16i$$

$$(3-2i)(1+2i) = 3-2i+6i-4i^2 = 7+4i$$

$$\frac{-3+2i}{1+4i} = \frac{(-3+2i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{-3+2i+12i+8}{1+16} = \frac{5+14i}{17} = \frac{5}{17}+\frac{14}{17}i$$

$$|8-7i| = \sqrt{8^2+7^2} = \sqrt{64+49} = \sqrt{113}$$

1.13.הצורה הקוטבית של מספרים מרוכבים



איור 1.2

כידוע, כל נקודה במישור הממשי ניתן לתאר ע"י זוג מספרים (x,y) הממוקמים במערכת צירים. מאחר וניתן לכתוב את המספר המרוכב $x+iy$ כזוג (x,y), נוכל להציג מספרים מרוכבים במישור XY שייקרא **המישור המרוכב** או **דיאגרמת ארגנד** (Argand).

כמו-כן, ניתן לבטא את המספר המרוכב $x+iy$ באמצעות מרחק הנקודה מהראשית - R והזווית φ שיוצר קו זה עם הצד החיובי של ציר x (ראה איור 1.2). ניתן לראות ש- $x = R\cos\varphi \quad y = R\sin\varphi$. כלומר המספר המרוכב z ניתן להכתב:

$z = x + iy = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, כאשר R נקרא **גודל** המספר המרוכב $R = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$, ואילו φ נקראת **המופע**.

כתיבה זו נקראת **הצורה הקוטבית** או **הפולארית** של המספר המרוכב, ואילו R ו-φ הם **הקואורדינטות הקוטביות**.

נראה מהו היתרון בכתיבה זו של המספר המרוכב:

נניח כי $Z_1 = x_1 + iy_1 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

וכן $Z_2 = x_2 + iy_2 = R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

נחשב:

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= R_1 \cdot R_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= R_1R_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\ &= R_1R_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \end{aligned}$$

כלומר, המכפלה מתבטאת בגודל השווה למכפלת $R_1 \cdot R_2$ ואילו המופע החדש הוא סכום המופעים. באותה דרך קל לראות ש-

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2}\left[\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right]$$

וכן ניתן להוכיח באינדוקציה כי -

$$\boxed{Z^n = \left\{R(\cos\phi + i\sin\phi)\right\}^n = R^n\left[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\right] \quad (1.1)}$$

כאשר n מספר שלם.

ניתן גם להרחיב את ההוכחה ל-n מספר ממשי כלשהו.

המשוואה האחרונה נקראת **משפט דה-מואבר**.

1.14.שורשים של מספר מרוכב

מספר ω נקרא שורש n-י של Z אם קיים $\omega^n = Z$ ואז אנחנו כותבים $\omega = Z^{\frac{1}{n}}$. על-סמך משפט דה-מואבר ניתן להראות שאם n הוא שלם וחיובי אזי

$$\omega = Z^{\frac{1}{n}} = \left\{R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{R\left[\cos(\vartheta + 2\pi k) + i\sin(\vartheta + 2\pi k)\right]\right\}^{\frac{1}{n}} =$$

$$= R^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

כאשר $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ שכן קיים $\omega^n = Z$. מכאן נובע שיש n ערכים שונים ל- $Z^{1/n}$. כלומר, ל-Z יש n שורשים n-ים שונים בתנאי ש- $Z \neq 0$. עבור $k = n$ מתקבל אותו שורש כמו $k = 0$, עבור $k = n+1$ מתקבל אותו שורש כמו $k = 1$, ולכן יש סך הכל n שורשים שונים!

דוגמאות:

1. חשב:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$

נכתוב בצורה קוטבית:

$$1+\sqrt{3}i = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$R = \sqrt{1+3} = 2$$

$$2\cos\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm 60°$$

$$2\sin\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60°$$

$$1+\sqrt{3}i = 2(\cos 60 + i\sin 60)$$

$$1-\sqrt{3}i = 2\left[\cos(-60) + i\sin(-60)\right]$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2(\cos 60 + i\sin 60)}{2\left[\cos(-60) + i\sin(-60)\right]} = \cos 120 + i\sin 120$$

$$Z^{10} = \cos 1200 + i\sin 1200 = \cos 120 + i\sin 120 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

בתחום הפיסיקה נוהגים לציין גודל של זויות באמצעות רדיאנים ולא באמצעות מעלות. רדיאן היא זווית במעגל שאורך הקשת שמולה שווה לרדיוס המעגל.

במעגל יש איפוא 2π רדיאנים, כלומר: $360° = 2\pi_{rad}$.

מכאן נובע:

רדיאן אחד $= 57.3° \approx \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ}$

באופן כללי:

$$\boxed{\frac{\vartheta_{Rad}}{\vartheta_{Deg}} = \frac{2\pi}{360°}}$$

$$180° = \pi_{rad}\,;\quad 90° = \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

2. חשב את הערכים של w המקיימים $w^5 = Z = -32$:

בצורה הקוטבית- $w^5 = -32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$

לפי משפט דה-מואבר- $w = (-32)^{1/5} = 32^{1/5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right)\right]$

$k = 0$ $\quad w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$k = 1$ $\quad w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$

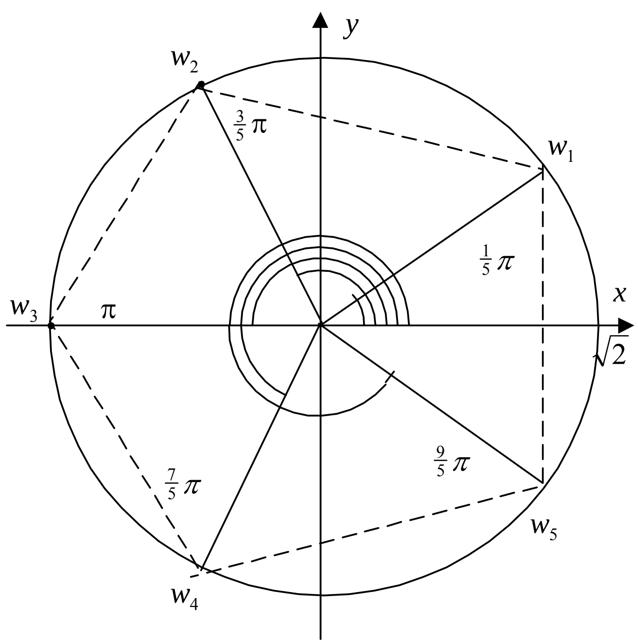
$k = 2$ $\quad w_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}\right) = -2$

$k = 3$ $\quad w_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$

$k = 4$ $\quad w_5 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$

עבור $k = 5,6,\ldots$ נחזור על אותם ערכים שכבר קיבלנו ולכן אלו הם **הפתרונות** או **השורשים** היחידים של המשוואה הנתונה.

אם נתאר את ערכי הפתרונות במישור המרוכב,
נקבל את התיאור הבא:



שים לב שהנקודות $w_1 \ldots\ldots w_5$ נמצאות על קדקודי מחומש משוכלל.

איור