11. האנטגרל המסויים. (Definite integral)

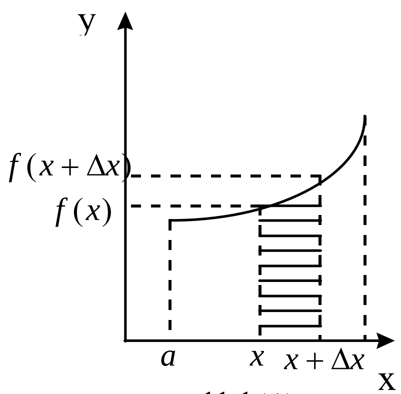
11.1 הגדרה

נתון: $F(x)=\int f(x)dx$ נגדיר את הסמל $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ הנקרא ״אנטגרל מסוים״.

נוכיח שכאשר $f(x)>0$ ו- $b>a$ משמעות האנטגרל המסויים הוא השטח מתחת ל- $f(x)$ בין a ו- b . b נקרא גבול עליון , a נקרא גבול תחתון . נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת ברווח $a\le x\le b$

נסמן ב- $A(x)$ את הפונקציה המבטאת את השטח מתחת לעקומה מנקודה a עד נקודה x.

אם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה עולה נוכל לכתוב את אי-שוויון הבא:



איור 11.1

$$f(x)\cdot\Delta x \le A(x+\Delta x)-A(x)\le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

משמעותו: השטח מתחת לקו הפונקציה,

$A(x+\Delta x)-A(x)$, קטן משטח המלבן הגדול

$f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$ וגדול משטח המלבן הקטן $f(x)\cdot\Delta x$.

אם נחלק ב- Δx נקבל:

$$f(x)\le\frac{\Delta A}{\Delta x}\le f(x+\Delta x)$$

אם נקח את הגבול כאשר $\Delta x\to 0$ נקבל:

$$\frac{dA}{dx}=f(x)$$

$$A(x)=\int f(x)dx=F(x)+c$$
$$A(a)=F(a)+c=0\to c=-F(a)$$
$$A(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)$$

כלומר, $A(x)$, השטח מתחת לפונקציה מ- a ל- x , היא פונקציה שנגזרתה $f(x)$. כלומר $A(x)$ היא אנטגרל של $f(x)$, $A(x)=\int f(x)dx+c$.

השטח עד נקודה כלשהי x_0 ניתן ע״י $A(x_0)=\int f(x)dx\big|_{x=x_0}+c$ אבל במקרה זה ניתן לקבוע את c , שכן $A(a)=0$ ומכאן $C=-\int f(x)dx\big|_{x=a}$

אם אנו מעוניינים לחשב את השטח בין a ל- b כלומר

$$A(b)=\int f(x)dx\Big|_{x=b}-\int f(x)dx\Big|_{x=a}$$

מסמנים את הביטוי הנ"ל בדרך פשוטה :

$$A(b)=\int_a^b f(x)dx=\int f(x)dx\Big|_{x=b}-\int f(x)dx\Big|_{x=a}$$

משתמשים גם בסימון הבא :

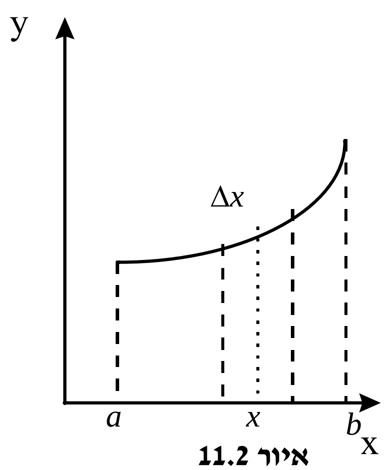
$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

כאשר $F(x)$ היא פונקציה שנגזרתה $f(x)$

$$A(x)=F(x)-F(a)=\int_a^x f(x)dx$$

11.2 האנטגרל כסכום

ראוי לציין שאפשר לכתוב את השטח מתחת לפונקציה $f(x)$ בין a ל- b בצורה הבאה :



איור 11.2

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

כאשר מחלקים הרווח $a-b$ ל- n חלקים שווים דהיינו $\Delta x=\frac{a-b}{n}$. זה אינו מדויק, אך אם נקח $\Delta x_i\to 0$ או $n\to\infty$, נקבל שטח מדויק.
כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=A(b)$$

ולכן כותבים :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

נוסחה זו מקשרת בין סכום של האברים לאנטגרל .
נוסחה זו גם מאפשרת לנו לחשב אנטגרלים מסויימים במחשב, שכן המחשב מבצע סכום במהירות רבה!

<u>דוגמה למשמעות האנטגרל כסכום.</u>

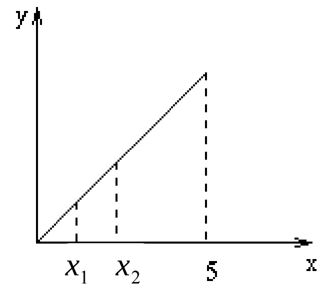
נחשב האנטגרל המסויים :

$$\int_0^5 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5 = \frac{25}{2}$$

נוכיח זאת ע"י בצוע הסכום. נחלק את הרווח $0 \le x \le 5$ ל- n חלקים שוים באופן $\Delta x = \frac{5}{n}$

נבחר את הנקודות $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ כנקודות קצה ימנית של הרווחים.

כלומר :



איור 11.3

$$x_1 = \Delta x$$
$$x_2 = 2\Delta x$$
$$x_3 = 3\Delta x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = n\Delta x$$

$\Delta x_i = \Delta x = \frac{5}{n}$ כולם שווים.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot \Delta x)\Delta x = (1+2+3+\dots+n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{2} = \int_0^5 x dx$$

אם נבחר את x_i להיות קצה שמאלי של הרווח כלומר :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \Delta x \quad x_3 = 2\Delta x \dots \ x_n = (n-1)\Delta x$$

נקבל

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\Delta x \cdot \Delta x = (1+2+3+\dots+(n-1))(\Delta x)^2 = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

ומקבלים אותה תוראה : $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{2}$.

שים לב: במקרה הראשון עבור n סופי השטח היה גדול יותר ובמקרה השני היה קטן יותר אך בשניהם כאשר $n \to \infty$ מקבלים אותה תוצאה.

<u>11.3 חוקי אנטגרציה</u>

נראה עתה כמה חוקים חשובים

(1

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

הוכחה :

$$\int_a^a f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_{x=a} - \int f(x)dx\Big|_{x=a} = 0$$

(2

$$\int_a^b fx)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

הוכחה:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_c - \int f(x)dx\Big|_a + \int f(x)dx\Big|_{x=b} - \int f(x)dx\Big|_{x=a} =$$

$$\int f(x)dx\Big|_{x=b} - \int f(x)dx\Big|_{x=a} = \int_a^b f(x)dx$$

מ.ש.ל.

וזה גם נכון מבחינת השטחים.

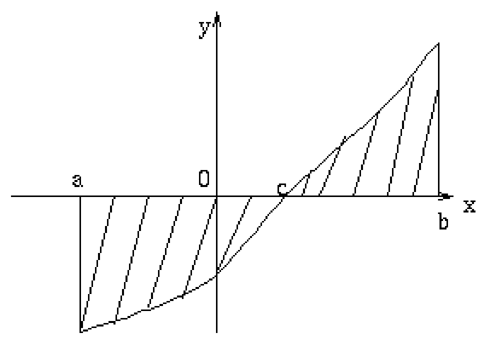
(3

קל מאוד להוכיח:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(4

הערה חשובה: אם יש לנו פונקציה מהצורה:



איור 11.4

אזי

$$\int_a^c f(x)dx < 0$$

אילו

$$\int_c^b f(x)dx > 0$$

כלומר שטח שנמצא מתחת לעקומה ניתן ע"י האנטגרל בסימן שלילי ולכן חשוב האנטגרל

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

לא יתן את השטח שבין העקומה לציר x שכן האנטגרל $\int_a^c f(x)dx$ יתן תוצאה שלילית שתופחת מהאנטגרל החיובי $\int_c^b f(x)dx$. ולכן כדי לחשב השטח המקווקו צריך להוסיף $\left|\int_a^c f(x)dx\right|$ ל- $\int_c^b f(x)dx$. **חשוב** להבדיל בין חישוב האנטגרל $\int_a^b f(x)dx$ לבין חישוב השטח.

המטרה העיקרית היא חישוב האנטגרל ולא חישוב השטח!

11.4 דוגמאות:

1)
חשוב האנטגרל

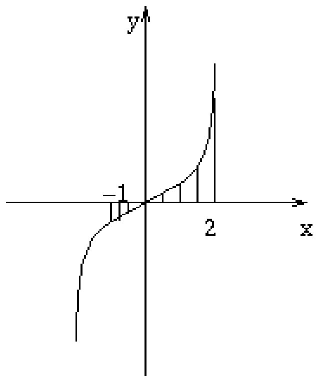
$$\int_{-1}^{2} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}$$

מצד שני חשב השטח בין הקו $y = x^3$ ובין ציר x בין $x=-1, x=2$.

$$\int_{-1}^{0} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{2} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2} = \frac{16}{4} + 0 = 4$$

$$S = \left|\int_{-1}^{0} x^3 dx\right| + \int_{0}^{2} x^3 dx = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$



איור 11.5

2) מצא את השטח מתחת לעקומה $f(x) = \sin x$ בין $x=0$ ו- $x=\pi$.
תוצאה זו תהיה חיובית שכן $\sin x$. עבור הערכים $0 \le x \le \pi$ הוא גדול או שוה לאפס.
ולכן:

$$\int_0^{\pi} dx \sin x = -\cos x\big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

תוצאה האנטגרל :

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$$

אולם השטח יהיה 2+2=4 מטעמי סימטריה.

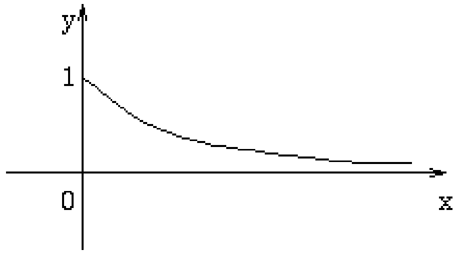
$$\int_0^{\pi} dx \sin x = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\big|_{\pi}^{\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos\pi) = -\cos 2\pi + \cos\pi = -1 + (-1) = -2$$

ולכן ס"ה השטח יהיה <u>4</u>.
3) חשב השטח מתחת לעקומה $y = e^{-x}$ בין 0 ל- ∞. האנטגרנד תמיד חיובי.

לכן:

$$S=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=$$
$$=-e^{-\infty}+e^0=1$$

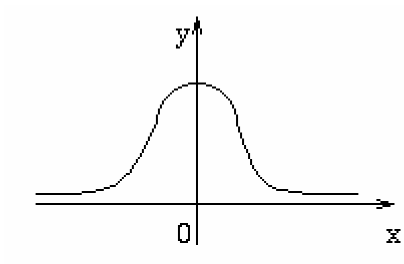


זוהי תוצאה מעניינת למרות שהפונקציה מתפשטת בציר x עד ∞ השטח תחתה הוא סופי . וזה נגרם מכיון ש- e^{-x} שואף מהר לאפס כאשר x גדל.

4) מצא השטח מתחת לעקומה $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ בין 0 ל- ∞ ובין 1 ל-∞.

לכן :

$$\int_0^\infty dx\frac{1}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$



$$\int_1^\infty\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_1^\infty=arctg\infty-arctg1=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{4}$$

בגלל הסימטריה

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

11.5 החלפת משתנה

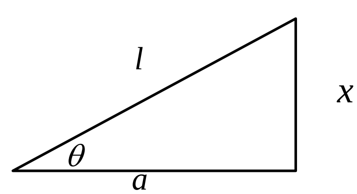
נעבור עתה למקרים בהם בצוע האנטגרל דורש החלפת משתנה. אז כמובן יש צורך לשנות את הגבולות בהתאם למשתנה החדש או לבצע אנטגרל לא מסויים ולהציב הגבולות כך כאשר חוזרים למשתנה הראשון. נדגים עתה שני דרכים אלו.

חשב :

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}=F(a)-F(-a)$$

נחשב האנטגרל הלא מסוים :

$$\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}=F(x)$$



$$x=atg\theta$$
$$dx=a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$\left(a^2+x^2\right)^{1/2}=a\sec\theta$$
$$\left(a^2+x^2\right)^{5/2}=a^5\sec^5\theta$$

$$l=\sqrt{x^2+a^2}$$

$$=\int\frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^5\sec^5\theta}=\frac{1}{a^4}\int\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a^4}\int(1-\cos^2\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{1}{a^4}\sin\theta-\frac{1}{a^4}\frac{\sin^3\theta}{3}+c=\frac{1}{a^4}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(\frac{a}{\sqrt{2}a}-\frac{1}{3}\frac{a^3}{2\sqrt{2}a^3}\right)-\frac{1}{a^4}\left(\frac{-a}{\sqrt{2}a}-\frac{1}{3}\frac{(-a)^3}{2\sqrt{2}a^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{a^4}\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

ועתה נראה בדרך הראשונה:

בהצבה $x=atg\theta$ צריך לבדוק מהם θ המתאימים לגבולות:

$x=a$, $x=-a$ עבור $x=a$:

$$a=atg\theta$$
$$tg\theta=1$$
$$\theta=\frac{\pi}{4}$$
$$-a=atg\theta$$
$$-1=tg\theta$$
$$\theta=-\frac{\pi}{4}$$

לכן:

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\pi/2}}=\frac{1}{a^4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\left(\frac{1}{a^4}\sin\theta-\frac{1}{a^4}\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\sin^3\pi/4}{3}\right)-\frac{1}{a^4}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sin^3\left(-\pi/4\right)}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{a^4}\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

לעתים נזדקק לבצע אנטגרל מהטיפוס $\int_a^b f(x,y)dx$ כאשר y מבוטא באמצעות קשר עם x , $y=y(x)$. על מנת לבצע האנטגרל עלינו רק להציב במקום y , $y(x)$ ולבצע האנטגרל על x אולם לעתים קל יותר להציב במקום x ו- dx את ערכיהם באמצעות y ו- dy ואז לשנות הגבולות בהתאם.

דוגמאות:

1) חשב $\int_a^{3a} y^2 dx$

כאשר

$$x^2 - y^2 = a^2$$

נציב $y^2 = x^2 - a^2$
ונקבל

$$\int_a^{3a} (x^2 - a^2)dx =$$

$$y^2 = x^2 - a^2$$

$$\int_a^{3a} (x^2 - a^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x\right]_a^{3a} = \frac{20}{3}a^3$$

בדרך השניה נחליף $2xdx = 2ydy$ ונקבל $\int_0^{\sqrt{8}a} \frac{y^2 ydy}{\sqrt{a^2 + y^2}}$

וזה אנטרל מסובך יותר!
2) חשב:

$$\int_0^1 ydx$$

כאשר:

$$x = \cos 2y$$

נוכל כאן לפתור y באמצעות x.

$$2y = \arccos x$$

$$y = \frac{1}{2}\arccos x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \arccos xdx$$

נציב:

$$u = \arccos x \qquad ; \qquad \upsilon = \mathrm{x}$$

$$\mathrm{du} = -\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}} \qquad ; \qquad \mathrm{d}\upsilon = \mathrm{dx}$$

$$\frac{1}{2}\int \arccos xdx = \frac{1}{2}x\arccos x + \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$1 - x^2 = u$$

$$-2xdx = du$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -u^{1/2} + C$$

$$=\frac{1}{2}x\arccos x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+c$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \arccos x dx=\frac{1}{2}\left[x\arccos x-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}[1\arccos 1-0]-\frac{1}{2}[0-1]=\frac{1}{2}$$

בשיטה השניה :

$$\int_0^1 ydx$$

$x=\cos 2y$; dx = -2sin2ydy

$x=0\rightarrow \cos 2y=0\rightarrow 2y=\frac{\pi}{2}\rightarrow y=\frac{\pi}{4}$

$x=1\rightarrow \cos 2y=1\rightarrow\ 2y=0\ \rightarrow y=0$

$$\int_0^1 ydx=\int_{\pi/4}^0 y(-2\sin 2y)dy=-2\int_{\pi/4}^0 y\sin 2ydy$$

$u=y$; dv = sin2ydy

du = dy ; v = $-\frac{1}{2}\cos 2y$

$$-2\int_{\pi/4}^0 y\sin 2ydy=-2\left[-\frac{1}{2}y\cos 2y\right]_{\frac{\pi}{4}}^0-\int_{\pi/4}^0\cos 2ydy=0-\frac{1}{2}\sin 2ydy\Big|_{\frac{\pi}{4}}^0=-\frac{1}{2}\sin 0+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$$

.3

$$\int_0^\infty dx\cdot x^n e^{-x}$$

נחשב כאשר n שלם :

$u=x^n$; dv = $e^{-x}dx$

$du=nx^{n-1}$; v = $-e^{-x}$

$$\int_0^\infty dx\cdot x^n e^{-x}=-x^n e^{-x}\Big|_0^\infty+n\int_0^\infty dxx^{n-1}e^{-x}=0+n\int_0^\infty dxx^{n-1}e^{-x}=n(n-1)\int_0^\infty dxx^{n-2}e^{-x}=$$

$$=n(n-1)(n-2)\ldots 1\int_0^\infty dxe^{-x}=n!\cdot\left(-e^{-x}\right)_0^\infty=n!(0-(-1))=n!$$