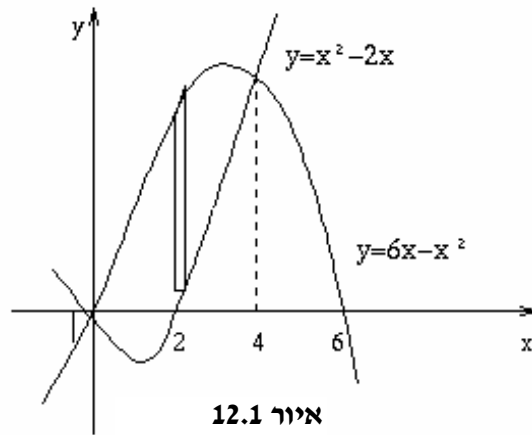


12. שמושים של אנטגראלים מסוימים.

12.1 שטחים



1. מצא את השטח המוגבל בין תרמי לות.

$$y = x^2 - 2x \quad \text{ו} \quad y = 6x - x^2$$

הפת ולות נתכות במק ודת הצות:

$$x^2 - 2x = 6x - x^2$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 8$$

רוחב המלבן Δx וגובהו:

$$6x - x^2 - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$$

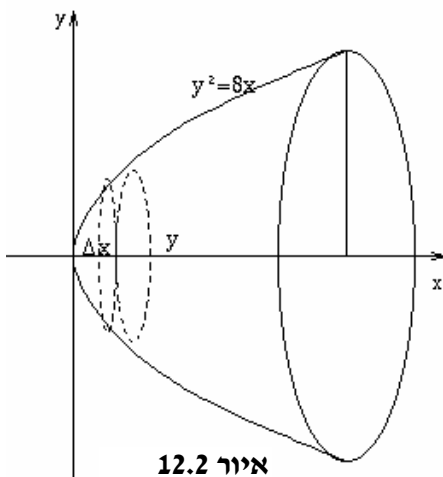
ולכן שטחו:

$$(8x - 2x^2)\Delta x$$

והשטח המבוקש יהיה:

$$\int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$$

12.2 נפחים סיבוביים



1. מצא את הנפח הנוצר ע"י סבוב חלק הרביע

הראשון הכלוא בין הפרבולה $y^2 = 8x$ והישר

$x = 2$ סביב ציר x . נחלק השטח לרצועות אנכיות

כשמסובבים את המלבן סביב ציר x

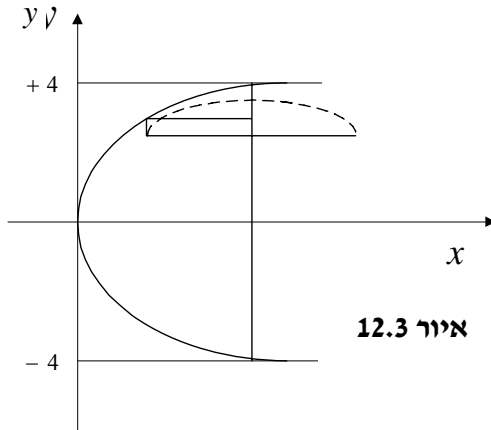
נוצרת דיסקית בעלת רדיוס y ורוחב Δx

נפח הדיסקית הוא :

$$dV = \pi y^2 \Delta x$$

ולכן הנפח הכללי יהיה :

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi x^2 \Big|_0^2 = 16\pi$$



איור 12.3

2. מצא את הנפח הנוצר ע"י סיבוב השטח

המוגבל ע"י הפרבולה $y^2 = 8x$ והישר $x = 2$ סביב הישר $x = 2$.

נחלק השטח לרצועות אופקיות. כשמסובבים

את המלבן סביב $x = 2$ נוצרת דיסקית אשררדיוסה $2 - x$ גבהה Δy ונפחה $\pi(2 - x)^2 \Delta y$. נפח גוף הסבוב הוא סכום נפחהדיסקיות מ- $y = -4$ עד $y = +4$ דהיינו:

$$V = \int_{-4}^4 \pi(2-x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 (2-x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{256}{15} \pi$$

12.3 מומנטים

3. מומנט ראשון של שטח מישורי ביחס

לישר מוגדר כסכום של מכפלת השטח

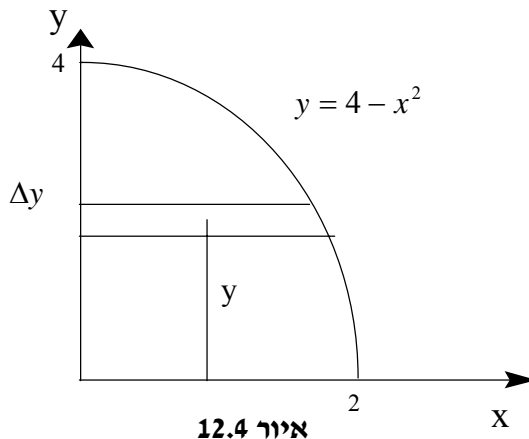
במרחקם לישר.

מצא את המומנטים ביחס לציר x וביחסלציר y של השטח המישורי $y = 4 - x^2$ ברביע הראשון. שטח המלבן $x\Delta y$ המומנט הראשון של שטח זה לגבי ציר x הוא $yx\Delta y$.

המומנט של כל השטח :

$$M_x = \int_0^4 yx dy = \int_2^0 (4 - x^2)x(-2x dx) =$$

$$= -2 \int_2^0 (4x^2 - x^4) dx = -2 \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_2^0 = \frac{128}{15}$$

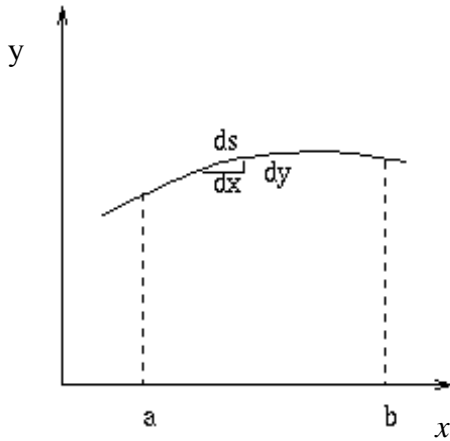
וביחס לציר y 

איור 12.4

$$\begin{aligned}M_y &= \int_0^2 xy dx = \int_0^2 x(4 - x^2) dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 \\ &= 8 - \frac{16}{4} = 4\end{aligned}$$

12.4 אורך קשת :

נחשב אורך קשת של פונקציה $y = f(x)$ בין $x = a$ ו- $x = b$



איור 12.5

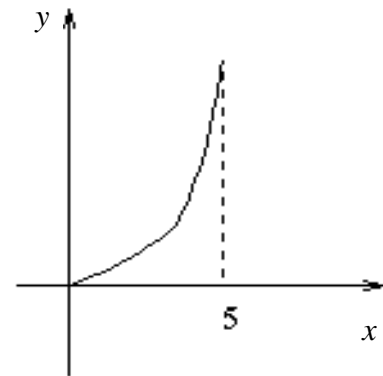
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

זוהי נוסחת אורך קשת!

דוגמה: מצא את אורך הקשת של העקומה $y = x^{3/2}$ מ- $x = 0$ עד $x = 5$.



איור 12.6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2} - 1\right] = \\ &= \frac{8}{27} \left[\frac{343}{8} - 1\right] = \frac{335}{27} \end{aligned}$$