13. גזירה מתחת לסימון האנטגרל

לעתים קרובות האנטגרל תלוי במשתנה נוסף (פרמטר) למשתנה הבלתי תלוי x!

$$I(\mu)=\int_a^b dxf(x,\mu)$$

האנטגרל תלוי ב- μ כי לא מופיע בתוצאה x אלא רק μ.
אם נגזור לפי μ

$$I'(\mu)=\int_a^b dx\frac{df(x,\mu)}{d\mu}$$

למשל:

$$I(\mu)=\int_0^\infty e^{-\mu x}dx=-\frac{x\,\mathrm{e}^{-\mu x}}{\mu}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{\mu}$$

$$I'(\mu)=-\int_0^\infty \underbrace{x}_{U}\underbrace{e^{-\mu x}dx}_{dV}=\mu xe^{-\mu x}\Big|_0^\infty-\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu x}dx=-\frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{1}{\mu}\right)=-\frac{1}{\mu^2}$$

אבל על מנת לקבל תוצאה זו ניתן לגזור:

$$I(\mu)=+\frac{1}{\mu}$$

$$I'(\mu)=-\frac{1}{\mu^2}$$

$$I''(\mu)=\int_0^\infty x^2e^{-\mu x}dx$$

ונוכל לחשב זאת ע"י שנגזור $I'(\mu)$
כלומר:

$$I''(\mu)=\frac{2}{\mu^3}$$

לעתים קרובות מעונינים לחשב $I'(\mu)$ ואין אפשרות לחשב את $I(\mu)$ אך יש אפשרות לחשב $\int_a^b dx\frac{df}{d\mu}$

לדוגמה:

$$I(\mu)=\int_0^1\frac{arctg\mu\,\mathrm{x}}{x}dx$$

איננו יודעים לחשב אנטגרל זה אולם

$$I'(\mu)=\int_0^1\frac{x}{1+\mu^2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{1+\mu^2x^2}dx=\frac{1}{\mu}\int_0^\mu\frac{dU}{1+U^2}=\left\|\begin{matrix}\mu\,\mathrm{x}=\mathrm{U}\\ \mathrm{dx}=\dfrac{\mathrm{dU}}{\mu}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\mu}arctgU\Big|_0^\mu=\frac{1}{\mu}arctg\mu$$

כלומר הצלחנו לחשב $I'(\mu)$ בלי לחשב את $I(\mu)$.

לעתים יש אפשרות לחשב אנטגרלים מסוימים ע"י גזירתם ביחס לפרמטר חשוב האנטגרל ואז לעשות אנטגרציה.

לדוגמה:

$$I(\mu)=\int_0^1 \frac{x^\mu-1}{\ln x}dx$$

נוכל לכתוב:

$$x^\mu = e^{\ln x^\mu} = e^{\mu \ln x}$$

כלומר:

$$I(\mu)=\int_0^1 \frac{e^{\mu\ln x}-1}{\ln x}dx$$

$$I'(\mu)=\int_0^1 \frac{1}{\ln x}\frac{d}{d\mu}\left(e^{\mu\ln x}-1\right)dx=\int_0^1 \frac{1}{\ln x}\ln x e^{\mu\ln x}dx=\int_0^1 xe^{\mu\ln x}dx=\int_0^1 x^\mu dx=\left.\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right|_0^1=$$

אם $\mu\le -1$ האנטגרל מתבדר $I'(\mu)=\infty$

אם $\mu<-1$ מקבלים $\frac{1}{\mu+1}$

כלומר:

$$\frac{dI}{d\mu}=\frac{1}{1+\mu}$$

$$I(\mu)=\int\frac{1}{1+\mu}d\mu=\ln(\mu+1)+c$$

ע"מ לקבוע את C אנו יודעים:

$I(0)=0 \quad \rightarrow \quad c=0$

מכאן נובע:

$$\int_0^1 \frac{x^\mu-1}{\ln x}dx=\ln(\mu+1)$$

דוגמה נוספת:

נתון:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

נחשב

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(2-\cos x)^2}$$

$$I(\alpha)=\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha-\cos x}=\pi\left(\alpha^2-1\right)^{-1/2}$$

מצד אחד:

$$I'(\alpha)=\int_0^\pi \frac{(-dx)}{(\alpha-\cos x)^2}$$

ומצד שני:

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{2}\pi\left(\alpha^2-1\right)^{-3/2}\cdot 2\alpha=\frac{-\pi\alpha}{\left(\alpha^2-1\right)^{3/2}}$$

כלומר:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(2-\cos x)^2}=\frac{\pi\alpha}{\left(\alpha^2-1\right)^{3/2}}$$

ואילו

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$