14. אנטגרלים לא אמיתיים.

14.1 פונקציה רציפה

לפני שנדון באנטגרלים לא אמיתיים נחזור על ההגדרה של פונקציה רציפה ואי רציפה.

פונקציה נקראת רציפה ב- $x = x_0$ אם ורק אם היא מקיימת התנאים הבאים :

א. $f(x_0)$ - מוגדר

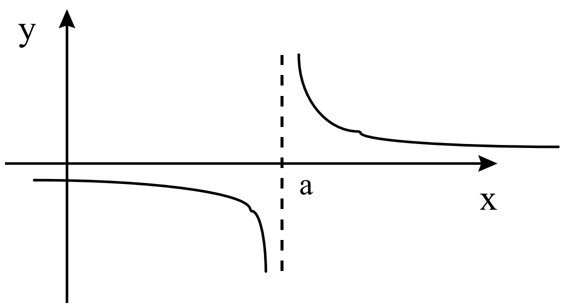
ב. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ קיים

אחרת היא אינה רציפה.

דוגמה : הפונקציה $y = \dfrac{1}{x-a}$ אינה רציפה בנקודה $x = a$ שכן,

א. $f(a)$ אינו מוגדר.

ב. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ אינו קיים (שוה ל- ∞)



איור 14.1

דוגמה נוספת: הפונקציה מהצורה

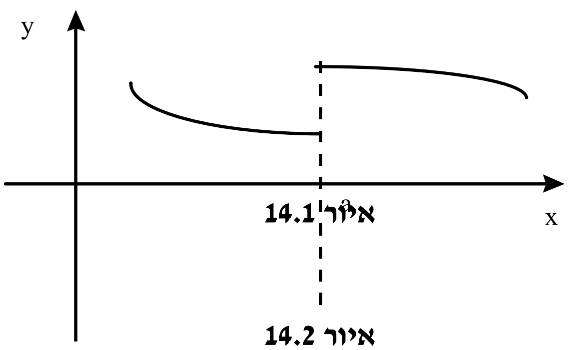
אינה רציפה שכן אמנם $f(x_0)$ יכול

להיות מוגדר אולם :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

ולכן אין לפונקציה גבול, כלומר

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים .



איור 14.2

עד כה טפלנו באנטגרלים מסוימים מהצורה $\int_a^b f(x)dx$

כאשר $f(x)$ היה רציף בתחום האינטגרציה.

נשאל עתה מה יקרה כאשר $f(x)$ אי רציף בנקודה אחת לפחות בתחום $a \le x \le b$?

14.2. אינטגרל לא אמיתי

אנטגרל מסוים $\int_a^b f(x)dx$ נקרא אנטגרל **לא אמיתי** אם :

א. לאנטגרנד $f(x)$ נקודת אי רציפות אחת לפחות בתחום $a \le x \le b$

או :

ב. לפחות אחד מגבולות האנטגרציה הוא אינסוף. במקרים אלו מרחיבים את הגדרת האנטגרל

המסוים באופן הבא:

נבחין בין 4 מקרים:

אנטגרל אי רציף:

1. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)dx$$

2. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)dx$$

3. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה a ו- b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to a^+\\ \beta\to b^-}}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

4. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה c כאשר $a<c<b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\gamma\to c^-}\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \lim_{\gamma\to c^+}\int_\gamma^b f(x)dx$$

גבולות האנטגרציה אינסופיים:

1.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{U\to\infty}\int_a^U f(x)dx$$

2.

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{U\to-\infty}\int_U^b f(x)dx$$

3.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\substack{U\to\infty\\ V\to-\infty}}\int_V^U f(x)dx$$

דוגמאות:

1. מתאים למקרה 1.

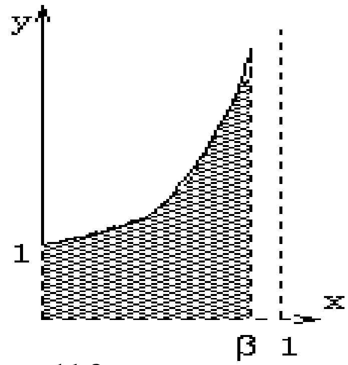
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to1^-}\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

נחשב:

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^\beta = \arcsin\beta$$

$$\lim_{\beta\to -1}\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to -1}\arcsin\beta = \frac{\pi}{2}$$

המשמעות הגאומטרית:



איור 14.3

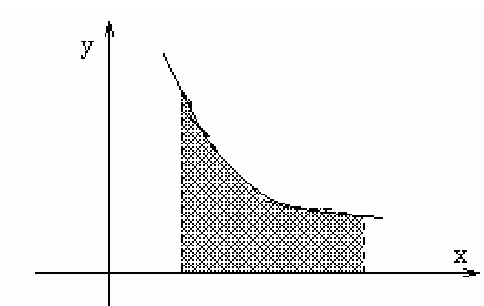
דוגמה למקרה 2:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

כאן האנטגרנד הוא ∞ בגבול התחתון ולכן צריך לבצע בצורה הבאה:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\alpha^4 = \lim_{\alpha\to 0^+}\left(4-2\sqrt{\alpha}\right) = 4$$

באופן גאומטרי:



איור 14.4

דוגמה למקרה 3 :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\substack{\beta\to 1^-\\ \alpha\to -1^+}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\substack{\beta\to 1^-\\ \alpha\to -1^+}}\arcsin x\Big|_{\alpha}^{\beta}=\lim_{\substack{\beta\to 1^-\\ \alpha\to -1^+}}\left(\arcsin\beta-\arcsin\alpha\right)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

מבחינת גאומטרית גבול השטח הוא π .

כל הדוגמאות שהבאנו עד כה, נקראים אינטגרלים לא אמיתיים והאינטגרל קיים כיון שהתוצאה היתה סופית. כיון שהיה גבול לפי ההגדרה.

אם הגבול לא קיים אזי הסמל $\int_a^b f(x)dx$ נקרא חסר משמעות או חסר מובן או האנטגרל מתבדר.

דוגמה :

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{\alpha}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\ln 1-\ln\alpha\right)$$

גבול זה אינו קיים ולכן הסמל $\int_0^1\frac{dx}{x}$ הוא חסר משמעות או האנטגרל מתבדר.

נעבור לטפל עתה במקרה הרביעי בו האנטגרנד אינו רציף בנקודה a>c>b.

נוכל לכתוב :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

אם אחד משני האנטגרלים באגף ימין מתבדר אזי האנטגרל בצד שמאל חסר משמעות (מתבדר).

דוגמה :

$$\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$$

סטודנט לא זהיר יבצע האנטגרל בצורה הבאה :

$$=-\frac{1}{x-1}\bigg|_0^2=-\frac{1}{1}+\frac{1}{-1}=-2$$

וזה בפרוש אבסורד שהרי $\frac{1}{(x-1)^2}>0$ ולכן האנטגרל אם הוא קיים חייב לתת שטח שהוא חיובי בסתירה לתוצאה שהיא שלילית.

התשובה היא שהאנטגרל פעולתו הוגדרה כפי שבצענו למעלה רק עבור פונקציה רציפה בתחום $a \le x \le b$ ואילו $\frac{1}{(x-1)^2}$ אי רציפה בנקודה x = 1 (הפונקציה שואפת ל- ∞) ולכן צריכים לבצע האנטגרל בדרך הבאה:

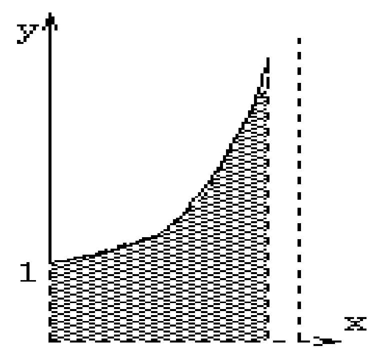
$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta\to 1^-}\int_0^\beta \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta\to 1^-}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^\beta = \lim_{\beta\to 1^-}\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = \infty$$

וזה כבר מוכיח שהאנטגרל $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ אינו קיים ולא מעניין אותנו אם האנטגרל השני $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ קיים או לא.

המשמעות הגאומטרית:

השטח מתחת לפונקציה מתבדר!



איור 14.5

דוגמאות נוספות:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{2/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\beta\to 0^-}\int_{-1}^\beta \frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{\alpha\to 0^+}\int_{-1}^\beta \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\beta\to 0^-} 3x^{1/3}\Big|_{-1}^\beta + \lim_{\alpha\to 0^+} 3x^{1/3}\Big|_\alpha^1 =$$

$$= \lim_{\beta\to 0^-}\left(3\beta^{1/3}+3\right) + \lim_{\alpha\to 0^+}\left(3-3\alpha^{1/3}\right) = 3+3 = 6$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3} =$$

אפשר לוותר על סימון הגבול ולכתוב:

$$\left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_{-1}^0 + \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_0^1 = \infty$$

אילו היינו מבצעים האנטגרל בלי לשים לב לנקודת האי רציפות היינו מקבלים תוצאה

לא נכונה $0 = \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_{-1}^{1}$.

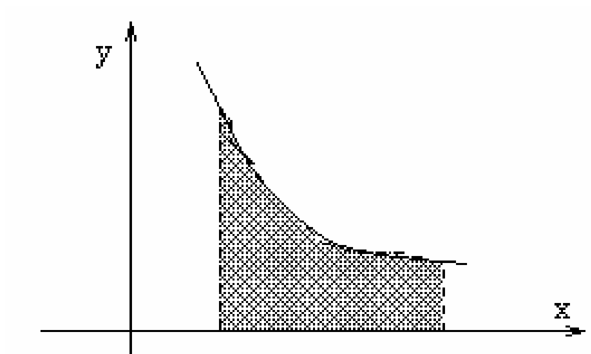
נוכל לסכם $\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^p}$ ו- $a \le b \le c$ מתכנסים רק אם p<1 ומתבדרים אם $p \ge 1$.

כפי שראינו גם אנטגרלים שהגבולות שלהם אינסוף נקראים לא אמתיים.

דוגמאות:

1) חשב

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{U\to\infty} \int_1^{U} \frac{dx}{x^2} = \lim_{U\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^U = \lim_{U\to\infty}\left(-\frac{1}{U}-1\right) = 1$$



איור 14.6

משמעות גאומטרית:

ניתן לסכם ולומר $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ כאשר a>0 האינטגרל מתכנס אם p>1 ומתבדר אם $p \le 1$. הוכחה:

$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^{\infty} = \left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_a^{\infty}$. אם $p > 1$ האינסוף הוא במכנה ומקבלים אפס ואם $p \le 1$

האינסוף במונה ומקבלים ∞.

2) חשב:

$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-x}$ כאשר n טבעי

$U = x^n \qquad \mathrm{dV} = \mathrm{e}^{-x} dx$

$dU = nx^{n-1} \qquad \mathrm{V} = -\mathrm{e}^{-x}$

$$\int_0^\infty x\ e^{-x} dx = -xne^{-x}\Big|_0^\infty = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = 0 + n\int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x} =$$

$$= n(n-1)\int_0^\infty dx x^{n-2} e^{-x} = n(n-1)(n-2)\cdots 1\int_0^\infty dx e^{-x} = n!\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = n!\cdot 1 = \underline{\underline{n!}}$$

פונקציה זו מוגדרת כפונקציה **גמא** $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$

קיים הקשר: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

3) חשב $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx =$

נציב:

$\mathrm{e}^{x} = U$

$x = \infty \quad \rightarrow \quad U = \infty$

$x = -\infty \quad \rightarrow \quad U = 0$

$e^x dx = dU$

$$\int_0^U \frac{dU}{U^2+1} = arctgU\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

4) חשב: $\int_0^\infty e^{-x} \underbrace{\sin x}_{U} dx =$

$U = \sin x \quad \mathrm{dU} = \mathrm{cosxdx}$

$\mathrm{V} = -\mathrm{e}^{-x} \quad \mathrm{dV} = \mathrm{e}^{-x} dx$

$dU = -\sin x dx \quad \mathrm{U} = \mathrm{cosx}$

$\mathrm{V} = -\mathrm{e}^{-x} \qquad \mathrm{dV} = \mathrm{e}^{-x} dx$

$$0 + \left(-e^{-x}\cos x\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\sin x dx = 0 + 1 = 1$$

$$2\int_0^\infty e^{-x}\sin dx = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin dx = \frac{1}{2}$$

לעתים חשוב לנו לדעת אם אנטגרל מתכנס או מתבדר אפילו בלי לדעת לחשב אותו. ישנן שיטות רבות ולא נלמד אותן.

דוגמאות:

1. בדוק התכנסות האנטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{3x^4+2x^2+5}$$

השיטה היא עבור x גדול ניתן להזניח $2x^2+5$ לעומת $3x^4$ ס״כ נקבל

$$\frac{x}{3x^4}=\frac{1}{3x^3}$$

ו- $\int \frac{1}{3x^3}dx$ מתכנס גם האנטגרל הנ״ל מתכנס.

2. בדוק התכנסות האנטגרל $\int_2^\infty \frac{5x^2+7}{\sqrt{4x^6-15}}dx$

עבור x גדול האנטגרנד הוא בקרוב $\frac{5x^2}{2x^3}\to\frac{5}{2}\frac{1}{x}$ מכוון ש- $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$ מתברר הרי גם האנטגרל הנ״ל מתבדר.

3. בדוק התכנסות האנטגרל

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}=\int_1^{1+\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}+\int_{1+\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

ולכן האנטגרל מתכנס!

נלמד שיטה נוספת להתכנסות.

שיטה זו נקראת מבחן ההשואה עבור אנטגרלים בעלי אנטגרנדים לא שליליים.

אם נתונות פונקציות המקיימות $0\le f(x)\le g(x)$, אזי אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס גם $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס, ולהפך אם $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר אזי $\int_a^b g(x)dx$ מתבדר.

4. האם האנטגרל הבא מתכנס או מתבדר? $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

וקיים $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ מתכנס ולכן גם $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ מתכנס.

5. בדוק התכנסות $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$

האנטגרל לא רציף בנקודה $x=0$ בגבול התחתון. נוכל להשתמש במבחן ההשואה.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

היות ש- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס לכן גם $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ קיים.

6. בדוק התכנסות $\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$ עבור $x>3$ $\frac{\ln x}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4}$ ולכן מכיון ש-

$\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4}dx$ מתבדר גם האנטגרל הנ״ל מתבדר.

7. בדוק התכנסות $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2}dx$

$$\frac{\cos^2 x}{x^2} < \frac{1}{x^2}$$

והיות $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס הרי גם האנטגרל הנ״ל מתכנס.

8. בדרך התכנסות $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$$

והיות $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס הרי גם האנטגרל הנ״ל מתכנס.

14.3 כלל דלופיטל (L'HÔPITAL)

לעתים קרובות אנו נתקלים בגבולות

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

כאשר

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ואז מקבלים תוצאה של $\frac{0}{0}$ ואז אנו אומרים שהתוצאה לא מוגדרת.

בצורה דומה ניתן לקבל

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

ואז בהצבה מקבלים בטוי מטיפוס $\frac{\infty}{\infty}$ הוא גם לא מוגדר.

ראינו עד כה שיטות איך לקבל ערך מוגדר של בטויים מסוג זה למשל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-7}{x+3} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

נלמד עתה שיטה נוספת וחשובה על מנת לחשב את ערכם של בטויים לא מוגדרים מטיפוס $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

<u>**כלל לופיטל**</u> (ללא הוכחה)

<u>משפט</u>

אם:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ ו- } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

או

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ ו- } \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

אז:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}$$

דוגמאות:

1) חשב

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0} 1} = \frac{1}{1} = 1$$

2) חשב

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1} = 108$$

3) חשב

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

ואמנם בסוף התוצאה הקודמת נתקלנו בגבול

$$x^{n-1}e^{-x}\Big|_0^\infty$$

וטענו שב- ∞ גודל זה אפס. ואמנם ניתן להוכיח זאת לפי לופיטל. זה מראה ש- e^x שואף ל- ∞ מהר יותר מכל חזקה של x.

שים לב: כי בדוגמה (3) יש לנו למעשה ביטוי מהצורה $\infty\cdot 0$ והעברנו אותו לצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ואמנם אפשר תמיד להעביר $\infty\cdot 0$ ל- $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$.

4) חשב

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\mu}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu\,\mathrm{x}^{\mu\text{-}1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{x}^\mu}=0 \quad , \quad \mu>0$$

זה מראה שכל חזקה חיובית של x שואפת לאינסוף מהר יותר מלוגריתמוס.

5) חשב

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\begin{cases}0 & \mathrm{n}>1\\ 1 & \mathrm{n}=1\\ \infty & \mathrm{n}<1\end{cases}$$

6) חשב

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{2x}=\frac{5}{4}$$

הגבול מטיפוס $\frac{0}{0}$ ולכן מותר להשתמש בכלל לופיטל.

לעתים נתקלים בבטוי מטיפוס $\infty-\infty$. ניתן להעביר בטוי לא מוגדר מטיפוס $\infty-\infty$ לבטוי $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$.

לדוגמה:

7) חשב

$$\lim_{x\to 0}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=$$

בטוי אחרון זה הוא מטיפוס $\frac{0}{0}$, ולכן לפי לופיטל:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{-1}{0}=\infty$$

8) חשב

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}=\frac{1}{2}$$

מטיפוס $\infty - \infty$ מטיפוס $\frac{0}{0}$

לעתים נתקלים בבטוי מטיפוס $0^0, \infty^0, 1^\infty$. אם $\lim f(x)$ הוא אחד מטיפוסים אלו אז מחשבים $\lim \ln f(x)$ שהוא מטיפוס $0\cdot\infty$

דוגמאות:

1) חשב הגבול

$y=x^{\sin x}$ כאשר $x\to 0^+$

מקבלים בטוי מהצורה 0^0 שאינו מוגדר. על מנת לחשב גבול זה נקח:

$$\ln y=\sin x\ln x$$

ועתה לפונקציה $\ln y$ יש צורה $0\cdot\infty$ כאשר $x\to 0^+$

נכתוב:

$$\ln y=\frac{\ln x}{\csc x}$$

המקבל צורה $\frac{\infty}{\infty}$. ונוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x tgx}{x}=-\lim\left(\frac{\sin x}{x}\cdot tgx\right)=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=0$$
$$\ln\lim_{x\to 0}y=0$$
$$\lim_{x\to 0}y=e^0=1$$

2) חשב

$$y=(\cot x)^x$$

מהצורה ∞^0 כאשר $x\to 0$

$$\ln y = x\ln\cot x=\frac{\ln\cot x}{1/x}$$

כאשר $x\to 0$ x בטוי מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cot x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}tgx\right)=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=0$$

$$\ln\lim_{x\to 0}y=0$$

$$\lim_{x\to 0}y=e^0=1$$

3) חשב גבול של $y=x^{\frac{1}{1-x}}$ כאשר $x\to 1$. זה בטוי מהצורה 1^∞.

נחשב $\log$ כאשר $x\to 1$:

$$\ln y=\frac{1}{1-x}\ln x$$

זה ביטוי מהצורה $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}=-1$$

$$\ln\lim_{x\to 1}y=-1 \qquad \lim_{x\to 1}y=e^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

4) חשב:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sec^3 2x\right)^{\cot^2 3x}$$

זהו בטוי לא מוגדר מטיפוס 1^∞.

נסמן:

$$y=\lim_{x\to 0}\left(\sec^3 2x\right)^{\cot^2 3x}$$

אזי:

$$\ln y=3\cot^2 3x\ln\sec 2x$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}3\cot^2 3x\ln\sec 2x=$$

זה מטיפוס $\infty.0$

או אם נכתוב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\sec 2x}{tg^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sec 2x}\left(-\frac{(\sin 2x)}{\cos^2 2x}\right)}{2tg3x\frac{3}{\cos^2 3x}}$$

וזה: $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6tg2x}{6tg3x\sec^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{tg3x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 3x}{3\sec^2 3x}=\frac{2}{3}$$

כלומר:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}y=e^{2/3}$$

$$y=\lim_{x\to 0}\left(\sec^3 2x\right)^{\cot^2 3x}=e^{2/3}$$

6) דוגמה לשימוש באנטגרלים:

$$\int_0^1 x\ln x dx=\left|\begin{matrix}U=\ln x & \mathrm{dU}=\frac{1}{\mathrm{x}}dx\\ dV=xdx & \mathrm{V}=\frac{\mathrm{x}^2}{2}\end{matrix}\right|=\left.\frac{x^2}{\ln x}\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x}dx\overset{a}{=}$$

$$\left\|\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}\ln x=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{2x}\right)=0\right\|$$

$$\overset{a}{=}0-\frac{1}{2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

14.4 סיכום

נתון $\int_a^b f(x)dx$. אם יש לאנטגרנד נקודת אי רציפות בנקודה $a<c<b$ מחשבים

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

לדוגמה:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x-1)}+\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx=\ln(x-1)\Big|_0^1+\ln(x-1)\Big|_1^2=\infty$$

$$\int_1^\infty \ln x dx = x\ln x\Big|_0^\infty-\int_1^\infty x\cdot\frac{1}{x}dx=\infty$$

$$u=\ln x \quad dv=dx$$

האנטגרל

$$\int_a^b \frac{1}{(x-c)^p}dx \ \left(\mathrm{a\le c\le b}\right)$$

מתכנס אם $p<1$

מתבדר אם $p\ge 1$

האנטגרל

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

$a>0$

מתכנס אם $p>1$

מתבדר אם $p\le 1$

דוגמאות:

1) האם האנטגרל הבא מתכנס או מתבדר?

$$\int_2^\infty \frac{x^2dx}{\left(x^2+7x+15\right)^2}$$

כאשר $x>>1$ האנטגרנד כמו $\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$ ולכן הוא מתכנס.

2) בדוק התכנסות:

$$\int_2^\infty \frac{2x^2-15}{\sqrt{x^5-3}}dx \ \rightarrow\ \int_2^\infty \frac{2}{\mathrm{x}^{1/2}}dx\rightarrow \quad \text{מתבדר}$$

3) בדוק התכנסות:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+3}}{\left(x^2+5x\right)}dx \qquad \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+5x}\underset{x\to 0}{\to}\frac{\sqrt{3}}{5x}$$

לכן האנטגרל מתבדר.

4) בדוק התכנסות

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+5x+1}dx$$

אין כלל בעיות ב- $x \to 0$

נבדוק ב- ∞

$$\frac{\sqrt{2x}+3}{x^2+5x+1}\to\frac{\sqrt{2x}}{x^2}dx\underset{x\to\infty}{\to}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{x^2}\approx\frac{1}{x^{3/2}}$$

מתכנס.

למדנו גם את **מבחן ההשואה**

אם נתון $\int_a^b f(x)dx$ וקיימת פונקציה $f(x)\le g(x)$ וקיים $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

ולהפך אם קיימת $g(x)\le f(x)$ ו- $\int_a^b g(x)dx$ מתבדר אזי גם $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר.

דוגמה:

חשב:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3-8}}$$

ע"י מבחן ההשואה:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-8}}=\frac{1}{\sqrt{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}}<\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

האנטגרל על כל אגף ימין מתכנס לכן גם האנטגרל הנתון מתכנס.