15. טורים אינסופיים.

נתונה סידרה של מספרים $\{a_0, a_1, \ldots. a_n\}$ - **סידרה** היא קבוצת איברים מסודרת.

סכום איברי הסידרה נקרא טור ונסמנו ב- S_n

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

לדוגמה: טור הנדסי

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

או

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$a_i = \frac{1}{2^i}$ נקרא האבר הכללי של הטור.

אם $n \to \infty$ כותבים את הטור בצורה הבאה:

$$S_\infty = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

והטור נקרא **טור אינסופי.**

דוגמה נוספת: נתון הטור

$$\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \ldots$$

האבר הכללי כאן:

$$a_n = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

וניתן לכתוב את הטור האינסופי באופן הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

במקרה זה אם נתחיל ב- n=1 נקבל שהטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$

15.1 התכנסות והתבדרות של טורים

הגדרה: אם קיים גבול ל- $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ כאשר $n \to \infty$ אזי הטור נקרא **מתכנס.** אם לא קיים גבול ל- S_n כאשר $n \to \infty$ הטור נקרא **מתבדר.**

כלומר: אם $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ הטור **מתכנס** ו- S נקרא סכום הטור.

אם $\lim_{n\to\infty} S_n$ אינו קיים אז הטור **מתבדר.**

הערה: טור מתבדר כאשר $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ או כאשר S_n גדל וקטן ואינו שואף לגבול יחיד.

דוגמה: טור מתבדר מהסוג הראשון

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots$$

זהו טור חשבוני שסכומו:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

דוגמה: טור מתבדר מהסוג השני הוא הטור **המתנודד.**

$$1,-1,1,-1,\ldots$$

כאן:

$$S_1 = 1\ ,\ S_2 = 0\ ,\ S_3 = 1\ ,\ S_4 = 0\ \ldots$$

כלומר S_n כאשר n זוגי שווה לאפס וכאשר n איזוגי שווה ל1-.

לכן אין גבול לטור והטור מתבדר.

דוגמה לטור מתכנס:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$$

זהו טור גאומטרי שהאבר הראשון a_1 והמנה q הם:

$$a_1 = \frac{1}{5};\ q = \frac{1}{5}$$

הנוסחה לטור גאומטרי היא:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

כלומר:

$$S_n = \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=\frac{1}{4}$$

הטור מתכנס וסכומו $\frac{1}{4}$.

חשוב להבהיר כאן שלדעת אם טור מתכנס או מתבדר **ע"י מציאת** S_n ובדיקת התנהגותו בגבול $n\to\infty$ היא קשה ביותר אם לא בלתי אפשרית. שכן ברוב המקרים לא ניתן כלל למצא את S_n. בכל זאת לעתים קרובות יש חשיבות גדולה לדעת אם טור נתון מתכנס או מתבדר.

בהמשך נלמד שיטות מבחן לבדיקת התכנסותו או התבדרותו של טור ללא מציאת S_n, רק על פי a_n.

אנו נדון רק במספר מבחנים חשובים. תחילה נדון בשני סוגים חשובים של טורים טור גאומטרי וטור הרמוני, אח"כ בטורים של אברים חיוביים בלבד ולבסוף טורים של אברים חיוביים ושליליים. לאחר שנדון בטורים בעלי אברים קבועים נעבור לדון בטורים שאבריהם משתנים הנקראים בשם טורי חזקות.

חשוב להעיר כאן שבבדיקת התכנסות או התבדרות של טור נתון ניתן להזניח **מספר סופי** של אברים בטור בתחילת הטור או בכל מקום בטור. סכומם הוא קבוע ויכול להשפיע על סכום הטור אך לא על התכנסותו או התבדרותו של הטור.

15.2 טור גאומטרי וטור הרמוני

שני טורים חשובים ביותר הם הטור הגאומטרי האינסופי

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^n+\ldots$$

והטור ההרמוני האינסופי

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

נדון תחילה בטור הגאומטרי:

סכום n+1 אברי בטור:

$$S_n=a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^{n+1}}{1-r}$$

מיד אנו יכולים לומר:

א. אם $|r|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}$ והטור מתכנס לסכום $\frac{a}{1-r}$ היות ו- $\lim\limits_{n\to\infty}r^{n+1}=0$.

ב. אם $|r|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{n+1}$ לא קיים ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ לא קיים.

הטור מתבדר ל- ∞ אם $r>1$ ומתנודד לקראת $\pm\infty$ (oscillates) אם $r<-1$

ג. אם $r=1$ אזי הטור הוא

$$a+a+a+a+\ldots$$

ולכן

$$S_n=(n+1)a$$

כלומר אם $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ והטור מתבדר ל- ∞.

ד. אם $r=-1$ אזי הטור הוא

$$a-a+a-a+\ldots$$

כלומר: אם n זוגי, $S_n=a$

אם n אי זוגי, $S_n=0$

מכאן ש- S_n מתנודד והטור מתבדר.

לסיכום: הטור

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^n+\ldots$$

מתכנס לכל $|r|<1$

ומתבדר לכל $|r|\geq 1$.

נדון עתה בטור **ההרמוני**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

נוכל לחלק את הטור לקבוצות הבאות:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots.$$

נוכל לראות שכל קבוצה של אברים סכומה גדול או שוה ל-2.

$$1 = 2^0 > \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

אפשר לראות שכל קבוצה של אברים בהמשך גם גדולה מ- $\frac{1}{2}$

היות ויש לנו מספר אינסופי של קבוצות שכל אחת גדולה מ- $\frac{1}{2}$ לכן $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

והטור ההרמוני מתבדר!
בהמשך נביא הוכחה מדויקת יותר להתבדרות הטור ההרמוני.
חשוב לציין שהטור ההרמוני מתבדר באופן איטי ביותר.
למשל: סכום של מליון אברים בטור עדיין קטן מ- 15.

15.3 תנאי הכרחי להתכנסות:

משפט: אם S_n מתכנס אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. להפך אין הדבר נכון בהכרח.

דוגמה: בטור ההרמוני $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ובכל זאת הטור מתבדר!!!

הוכחה: אם S_n מתכנס קיים

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$

כלומר בכל טור מתכנס חייב להתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אנו יודעים שהטור מתבדר.

זהו תנאי הכרחי להתכנסות וברור שזה לא תנאי מספיק.

נלמד עתה משפט חשוב נוסף:

15.4 טור מוכפל בקבוע:

משפט: אם k הוא קבוע ושונה מ- 0 ואם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס לסכום S אזי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ka_n$ מתכנס לסכום kS ואם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר גם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ka_n$ מתבדר.

הוכחה:

נסמן: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ו- $S_n' = \sum_{i=0}^{n} ka_i$

מכאן $S_n{}' = \sum_{i=0}^{n} ka_i = k\sum_{i=0}^{n} a_i = kS_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} kS_n = k\lim_{n\to\infty} S_n = kS$$

כ״כ ברור שאם הסדרה הראשונה מתבדרת גם השניה כך.

דוגמה: נתון הטור

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3^n}+\ldots$$

ניתן לכתוב את הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$

והיות והטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ מתכנס כי הוא טור גיאומטרי עם $r=\frac{1}{3}$ לכן גם הטור הנ״ל מתכנס.
והוא מתכנס ל-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3/4$$

דוגמה: הטור

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$$

מתבדר שכן:

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

והיות, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר גם הטור הנ״ל מתבדר.

כפי שאמרנו יש מספר שיטות לבדיקה אם טור מתכנס או מתבדר ללא חישוב $\lim_{n\to\infty} S_n$
רק ע״פ a_n. נתחיל בשיטה הנקראת מבחן האנטגרל.

15.5 מבחן האנטגרל:

נתון טור של אברים חיוביים, נסמן האבר הכללי $f(n)$ אזי $f(n)>0$ לכל n.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם $\int_a^{\infty} f(x)dx$ מתכנס ומתבדר אם $\int_a^{\infty} f(x)dx$ מתבדר $(a>0)$.

תוצאה זו נובעת מהעובדה שאנטגרל הוא למעשה סכום של אברים לכן אם האנטגרל מתכנס גם הטור מתכנס ולהפך.

הערה: משפט זה אינו אומר שערך הטור שוה לערך האנטגרל רק מאפשר לנו לדעת שאם אחד מתכנס גם השני מתכנס.

דוגמאות:

1) נתון הטור

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\ldots$$

בדוק האם הוא מתכנס או מתבדר?

נוכל לכתוב:

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

נקח:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

ולכן יש סיכוי לטור להתכנס.

קיים $x\to\infty$ $f(x)\to 0$. ונבדוק האנטגרל:

נבחר $a=1>0$

$$\int_a^\infty \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}dx=\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}dx=\infty$$

מתבדר לפי כללי התכנסות של אנטגרלים:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx=\begin{cases} \text{מתכנס} & p>1 \\ \text{מתבדר} & p\le 1 \end{cases}$$

או בדרך ישירה ע"י ביצוע האנטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}dx=\sqrt{2x+1}\Big|_1^\infty=\infty$$

כלומר האנטגרל מתבדר ולכן הטור מתבדר.

2) נתון הטור:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$$

בדוק האם הוא מתכנס או מתבדר?

$f(n)=\dfrac{1}{(2n)^2}$ נקח $f(x)=\dfrac{1}{4x^2}$

נבדוק האנטגרל

$$\int_{a=1}^{\infty}\frac{1}{4x^2}dx=-\frac{1}{4}x^{-1}\Big|_1^{\infty}=-\frac{1}{4}(0-1)=\frac{1}{4}$$

האנטגרל קיים לכן הטור מתכנס.

שים לב שמבחן האנטגרל נותן רק אינפורמציה אם הטור מתכנס או מתבדר ולא לאיזה ערך הטור מתכנס.

3) נתבונן במקרה הכללי הבא:

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

כאשר k מספר ממשי.

נבחר $f(x)=\frac{1}{x^k}$ ו- $a=1$

ואז עבור $k\neq 1$ נקבל:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^k}dx=\int_1^{\infty}x^{-k}dx=\frac{x^{-k+1}}{1-k}\Big|_1^{\infty}$$

אם $\underline{k>1}$ נקבל $-\frac{1}{1-k}$ וזו תוצאה סופית כלומר הטור מתכנס עבור $k>1$.

אם $\underline{k<1}$ נקבל ∞ כלומר הטור מתבדר ל- ∞ עבור $k<1$.

נדון במקרה $\underline{k=1}$, הטור הוא:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

אז נוכל לכתוב:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{\infty}=\infty$$

כלומר לפי מבחן האנטגרל הטור מתבדר.

לסכום הטור:

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots$$

מתכנס עבור $k>1$ ומתבדר עבור $k\leq 1$.

הערה: יש לנו כאן הוכחה נוספת שהטור ההרמוני מתבדר.

15.6 מבחן ההשוואה

מבחן ההשוואה להתכנסות :

טור **חיובי** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם כל אבר בו (החל ממקום מסויים בטור) קטן או שווה לאבר המתאים של טור חיובי מתכנס ידוע $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

מבחן השוואה להתבדרות :

טור חיובי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) גדול או שווה מן האבר המתאים של טור חיובי מתבדר ידוע $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$.

מבחן זה מקביל למבחן ההשוואה בהתכנסות והתבדרות של אנטגרלים.
משוים את האבר הכללי של טור נתון אשר רוצים לבדוק התכנסותו עם אברים כלליים של טורים מתכנסים ומתבדרים ידועים. ברוב המקרים משמשים כטורי השוואה הטור הגאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ המתכנס עבור $q<1$ ומתבדר עבור $q \ge 1$ וכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ המתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p \le 1$.

דוגמאות:

1) נתון הטור :

האם הוא מתכנס או מתבדר?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

לכל n קיים $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$

היות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס שכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ מתכנס עבור $k>1$, לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס.

2) בדוק התכנסות הטור :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

היות וקיים עבור $n>1$

$$\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n} \qquad \left(\frac{1}{3^3}<\frac{1}{3^2};\frac{1}{4^4}<\frac{1}{2^4};\ldots.\right).$$

והיות והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס (טור גאומטרי מתכנס עם $q=\frac{1}{2}<1$) הרי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ מתכנס.

3) נתון הטור

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots$$

נשווה טור זה עם הטור

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots$$

קיים לכל $n \geq 1$

$$\frac{1}{(2n+1)^4}<\frac{1}{n^4}$$

כיוון שהטור $\sum\frac{1}{n^4}$ מתכנס אזי גם הטור $\sum\frac{1}{(2n+1)^4}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

4) נתון הטור

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$$

נשווה טור זה לטור שאברו הכללי $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}}=\frac{1}{n+1}$$

והיות והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ הוא הרמוני ומתבדר לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתבדר.

5) נתון הטור

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

$$\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

היות והטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}$ מתבדר

אזי גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ מתבדר

6) נתון הטור

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$$

באמצעות מבחן ההשוואה:

$$\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$$

והיות ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ מתכנס.

באמצעות מבחן האנטגרל:

נבחר $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ונבצע

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx= \ =arctg\,x\Big|_1^{\infty}=arctg\infty-arctg1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

כלומר האנטגרל מתכנס ולכן גם הטור מתכנס.
שיטת מבחן נוספת שנלמד בהמשך נקראת בשם מבחן המנה.

15.7 מבחן המנה (של D'Alembert)

הטור **החיובי** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$,

ומתבדר אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

כאשר $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ אין אינפורמציה ממבחן המנה. במקרה הזה לא ידוע אם הטור מתבדר או מתכנס על פי מבחן המנה.

דוגמאות:

1) נתון הטור

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

$$a_n=\frac{n}{2^n}$$

נבדוק לפי מבחן המנה

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1$$

ולכן הטור מתכנס.

2) נתון הטור

$$\frac{1}{1000}+\frac{1\cdot 2}{1000^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1000^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1000^4}+\ldots\ldots+\frac{n!}{1000^n}+\ldots\ldots$$

$$a_n=\frac{n!}{1000^n}$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{1000^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{1000^{n+1}}\frac{1000^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000}=\infty>1$$

ולכן הטור מתבדר.

3) נבדוק את הטור

$$\frac{k}{1!}+\frac{k^2}{2!}+\frac{k^3}{3!}+\frac{k^4}{4!}+\ldots+\frac{k^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{k^n}{n!}$$

$$a_{n+1}=\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n+1}=0<1$$

ולכן הטור מתכנס!!

4) נבדוק את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2} \qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n^2}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=1$$

זאת אומרת קבלנו גבול 1 ולפי מבחן המנה לא ידוע אם הטור מתכנס או לא. אבל ראינו לפי מבחן האנטגרל שטור זה מתכנס.
מצד שני נבדוק את הטור ההרמוני:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1} \qquad a_n=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

גם כאן ידוע שהטור מתבדר. מכאן אנו רואים שאם הגבול 1 יכול להיות שהטור מתכנס או מתבדר.
5) בדוק התכנסות הטור

$$1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\dots$$

$$a_n=\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

ולכן הטור מתכנס.

דוגמאות כלליות:

1)

$$\frac{1}{1^2+4}+\frac{2}{2^2+4}+\frac{3}{3^2+4}+\frac{4}{4^2+4}+\dots+\frac{n}{n^2+4}+\dots$$

נבדוק לפי מבחן האנטגרל

$$f(n)=\frac{n}{n^2+4}$$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big|_1^\infty=\infty$$

ולכן הטור מתבדר.
נבדוק לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4)(n+1)}{n((n+1)^2+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+4n+4}{n(n^2+2n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+4n+4}{n^3+2n^2+5n}=1$$

ולכן אי אפשר להחליט לפי מבחן המנה!
דרך אחרת: נבדוק איך האבר הכללי מתנהג ב-x גדול.

$$\frac{x}{x^2+4}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

ולכן מתבדר.

2) נתון הטור $\frac{1^2}{e}+\frac{2^2}{e^2}+\frac{3^2}{e^3}+\frac{4^2}{e^4}+....+\frac{n^2}{e^n}+...$

נבדוק לפי מבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2e^n}{e^{n+1}n^2}=\frac{1}{e}<1 \qquad (e\cong 2.7)$$

ולכן הטור מתכנס.
נבדוק את התכנסות הטור הכללי:

$$\frac{1^2}{c}+\frac{2^2}{c^2}+\frac{3^2}{c^3}+\frac{4^2}{c^4}+...+\frac{n^2}{c^n}+...$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2c^n}{c^{n+1}n^2}=\frac{1}{c}$$

כלומר אם $c>1$ הטור מתכנס
אם $c<1$ הטור מתבדר.
למשל:

הטור הזה מתבדר: $\frac{1^2}{0.9}+\frac{2^2}{0.9^2}+\frac{3^2}{0.9^3}+...$

אם $c=1$ המצב לא ידוע לפי מבחן המנה. אבל אם $c=1$ מקבלים הטור
$1^2+2^2+3^2+...$

כלומר אבר כללי שאינו שואף לאפס ולכן הטור מתבדר!

3) בדוק את הטור: $\frac{\sin\sqrt{1}}{1^{3/2}}+\frac{\sin\sqrt{2}}{2^{3/2}}+\frac{\sin\sqrt{3}}{3^{3/2}}+...$

הטור $\frac{1}{1^{3/2}}+\frac{1}{2^{3/2}}+...+\frac{1}{n^{3/2}}+...$ מתכנס

ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ מתכנס.

שכן $\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{3/2}}\le\frac{1}{n^{3/2}}$ לכל n, $(\sin\alpha\le 1)$.
לכן לפי מבחן ההשוואה הטור מתכנס.
4) בדוק את הטור:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$$

האבר כללי

עבור $n>>1$ מתנהג כמו $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\approx\frac{1}{n^{3/2}}$

לכן הטור מתכנס.

5) בדוק את הטור

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

קיים $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ כי $\ln n<n$ לכל n טבעי.

והטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר לכן הטור הנ"ל מתבדר!

6) בדוק את הטור

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

קיים

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{n(n-1)}<\frac{1}{(n-1)^2}$$

הטור $\sum\frac{1}{(n-1)^2}$ מתכנס ולכן גם $\sum\frac{1}{n!}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

7) בדוק את הטור

$$1+\frac{4}{2\cdot 5}+\frac{4^2}{3\cdot 5^2}+\frac{4^3}{4\cdot 5^3}+\ldots$$

$$a_n=\frac{4^n}{(n+1)5^n}$$

$$a_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

ולכן הטור מתכנס.

8) בדוק את הטור

$$\frac{1}{2!}+\frac{1\cdot 3}{4!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{6!}+\ldots$$

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(2n)!}\qquad a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}{(2(n+1))!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=0$$

ולכן הטור מתכנס.

9) בדוק את הטור

$$2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4^3}+\ldots\ldots$$

$$a_n=\frac{(n+2)}{(n+1)4^n}\qquad a_{n+1}=\frac{n+3}{(n+2)4^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2\cdot 4}=\frac{1}{4}$$

ולכן הטור מתכנס.