17. טורי חזקות

טור אינסופי מהצורה $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

כאשר a_n קבועים לכל n, נקרא **טור חזקות ב-x**
באופן דומה יקרא הטור

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

טור חזקות ב- $x-x_0$.

אנו מגבילים את a_i, x, x_0 לקבל רק ערכים ממשיים.

לכל ערך נתון של x הופכים הטורים הנ"ל לטורים אינסופיים עם **אברים קבועים** אשר מתכנסים או מתבדרים לפי קריטריונים שכבר למדנו.

עבור $x=0$ בטור הראשון או $x=x_0$ בטור השני טורי החזקות ודאי מתכנסים היות ונשאר בטורים רק a_0.

יתכן שהטור לא מתכנס לכל ערך אחר של x או שהטור יתכנס לערכים מסויימים של x ויתבדר לכל ערך אחד של x או שהטור יתכנס לכל x .

קבוצת כל ערכי x שעבורם מתכנס טור החזקות
נקרא **אנטרוול ההתכנסות.**

את אנטרוול ההתכנסות ניתן לעתים קרובות למצא בעזרת מבחן המנה להתכנסות בהחלט וצריכים בדרך כלל גם מבחנים אחרים על מנת למצא התכנסות בקצוות אנטרוול ההתכנסות.

הסבר:

לפי מבחן המנה צריך לבדוק היחס

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$$

נניח $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$

אזי $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=l|x|$

אזי לפי מבחן המנה הטור מתכנס בהחלט אם $l|x|<1$.

כלומר: הטור יתכנס בהחלט אם $|x|<\frac{1}{l}$

והטור יתבדר אם $|x|>\frac{1}{l}$

כאשר $|x|=\frac{1}{l}$ המבחן נופל.

לסכום: נתון הטור $\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ וקיים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$ אזי הטור מתכנס

בהחלט בתוך האינטרוול $-\frac{1}{l}<x<\frac{1}{l}$

ומתבדר מחוץ לתחום זה דהיינו עבור: $x<-\frac{1}{l};x>\frac{1}{l}$

בנקודות $x=-\frac{1}{l}$ $x=\frac{1}{l}$ המצב לא ברור וטעון בדיקה.

אם $l=0$ טור החזקות מתכנס לכל x ואם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$

הטור מתכנס רק עבור x=0 .

המספר $r\equiv\frac{1}{l}$ נקרא בשם רדיוס ההתכנסות.

דוגמאות:

1) לאלו ערכים של x הטור מתכנס? $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

מיד מבחינים שעבור x=0 הטור מתכנס שכן כל האברים מתאפסים.

עבור $x\neq 0$ מבחן המנה נותן

$$U_n=\frac{x^n}{n} \qquad U_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n}{x^n(n+1)}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\right||x|$$

כלומר: הטור מתכנס בהחלט עבור $|x|<1$

ומתבדר עבור $|x|>1$

נבדוק את המקרה $|x|=1$ כלומר $x=\pm 1$

עבור $x=1$ הטור הוא: $1+1+\frac{1^2}{2}+\frac{1^3}{3}+...+\frac{1}{n}$

זהו טור הרמוני מתבדר.

עבור $x=-1$ הטור הוא

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$$

זהו טור הרמוני מתחלף המתכנס בתנאי לפי משפט לייבניץ.

לסכום: הטור מתכנס בתחום $-1\leq x<1$ ומתבדר לכל x אחר.

2) נתון הטור

$$1+x+2!x^2+3!x^3+...+n!x^n+...$$

הטור מתכנס ל- x=0 נבדוק לכל x אחר

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}|x|=\infty \quad \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|$$

כלומר $l=\infty$ והטור מתבדר לכל $x\neq 0$.

3) בדוק אנטרוול ההתכנסות של הטור

$$1+2x+4x^2+8x^3+...+2^nx^n+...$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| l=2=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}$$

כלומר הטור מתכנס בהחלט עבור $-\frac{1}{l}<x<\frac{1}{l}$

ואצלנו $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

עבור $x = \frac{1}{2}$ הטור מקבל את הערכים $1+1+1+1+\ldots$

שהוא מתבדר.

עבור $x = -\frac{1}{2}$ מקבלים $1-1+1-1+\ldots$

שאף הוא מתבדר (טור מתנודד). כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $|R| < \frac{1}{2}$

הערה: אפשר לכתוב גם באופן הבא

היות $\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

ותנאי ההתכנסות

רדיוס ההתכנסות $|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \equiv R$

ז"א כדי למצא את רדיוס ההתכנסות מחשבים הגבול הנ"ל.

4) חשב את רדיוס ההתכנסות של הטור

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

$$R \equiv \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2) = \infty$$

כלומר רדיוס ההתכנסות ∞ והטור מתכנס לכל x.

או בדרך הקודמת:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 = l$$

ולכן הטור מתכנס לכל x הסיבה כמובן העצרת במכנה.

5) מצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n n}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n n}3^n(n+1) = 3$$

כלומר הטור מתכנס לכל $|x| < 3$

או $-3 < x < 3$ ומתבדר ל$|x| > 3$.

מה קורה בנקודה $x = 3$:

הטור הוא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

וזה טור הרמוני מתבדר

בנקודה $x = -3$ הטור הוא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{3^n n} = \sum\frac{(-1)^{n-1}}{3n}$

טור הרמוני מתחלף המתכנס בתנאי.

תשובה: רדיוס ההתכנסות $-3 \le x < 3$

עבור $-3 < x < 3$ הטור מתכנס בהחלט

ועבור $x = -3$ הטור מתכנס בתנאי.

6) מצא את אנטרוול ההתכנסות של הטור

$$1+\frac{x-3}{1^2}+\frac{(x-3)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}+\ldots$$

לפי מבחן המנה הטור מתכנס עבור $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n}{n^2}\frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}}\right|=|x-3|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=|x-3|$$

כלומר הטור מתכנס עבור $|x-3|<1$

או $-1<x-3<1$

$2<x<4$

ומתבדר עבור $|x-3|>1$

או ב $x>4$ $x<2$

ב- $x=2$ הטור הוא

$$1-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\ldots$$

וב- $x=4$ הוא

$$1+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots$$

ושני הטורים מתכנסים.

לסיכום: הטור מתכנס בהחלט באנטרוול $2\le x\le 4$ ומתבדר בנקודות אחרות.

7) מצא את אנטרוול ההתכנסות של הטור

$$\frac{x+1}{\sqrt{1}}+\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n}\right|=|x+1|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x+1|$$

הטור מתכנס בהחלט עבור $|x+1|<1$ או

$-1<x+1<1$, כלומר עבור $-2<x<0$,

ומתבדר עבור $x<2$ ו- $x>0$.

ב $x=-2$ יהיה הטור

$$\frac{-1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

וב x=0 הוא

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

הטור הראשון מתכנס והשני מתבדר ולכן הטור הנתון מתכנס באינטרוול $-2\le x<0$ ומתבדר בנקודות אחרות.

17.1 תכונות של טורי חזקות

בתוך רדיוס ההתכנסות טור חזקות מתנהג באופן דומה ביותר לפולינום סופי.
נביא מספר תכונות של טורי חזקות ללא הוכחות.

א. טור חזקות ב-x בתוך אנטרוול ההתכנסות מייצג פונקציה רציפה של x.

כלומר $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ פונקציה רציפה לכל $-R<x<R$.

לדוגמה:

מטור גיאומטרי מקבלים $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...$

כלומר הטור מייצג פונקציה רציפה $f(x)=\frac{1}{1-x}$

באנטרוול ההתכנסות $-1<x<1$ שכן R=1. נשים לב שהפונקציה $\frac{1}{1-x}$ מוגדרת לכל $x\neq 1$ ואילו טור החזקות מתבדר מחוץ לאנטרוול ההתכנסות. מתיחסים לכך שהצגת הפונקציה בטור חזקות אפשרית רק אינטרוול (-1,1) של אינטרוול ההגדרה של f(x).

דוגמה נוספת: נתון הטור הרמוני הבא:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$$

הטור מייצג את פונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x}$ בתוך אנטרוול ההתכנסות $-1<x<1$.

ב. ניתן לחבר שני טורי חזקות לכל ערך של x בתוך רדיוס ההתכנסות המשותף לשני רדיוסי ההתכנסות.
כלומר אם נתון

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$
$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+...$$
$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+...+(a_n+b_n)x^n+...$$

ג. שני טורי חזקות ניתן להכפילם זה בזה (כמו פולינומים סופיים) לכל ערכי x ברווח ההתכנסות המשותף לשני אנטרוולים ההתכנסות.
אם נסתכל בטורים הקודמים

אזי $f(x)g(x)=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_1b_1+a_0b_2+a_2b_0)x^2+...$

כלומר המכפלה של הטורים מיצגת את מכפלת הפונקציות.
לדוגמה:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5...$$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+...$$
$$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}=1+(1-1)x+(1+1-1)x^2+(-1+1-1+1)x^3+$$
$$+(1-1+1-1+1)x^4+...=1+x^2+x^4+...$$

המתכנס ברווח $-1<x<1$
אפשר גם לראות זאת ע"י פתוח לטור גאומטרי

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+...$$

ד. ניתן גם לחלק טורי חזקות, אך אין דרך לקבוע את אנטרוול ההתכנסות של הטור המתקבל.

ה. טור חזקות שסכומו f(x) ניתן גם לגזור אבר אבר. הטור היוצא ייצג את הנגזרת של f(x) בתוך תחום ההתכנסות של הטור המקורי.
נוכיח שרדיוס ההתכנסות לא משתנה:

הוכחה: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

רדיוס ההתכנסות $R = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

בטור החדש:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות:

$$R' = \lim\left|\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

כלומר רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות זהה לרדיוס ההתכנסות של הטור המקורי.

דוגמה:

אם $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$

אזי $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$

מצד שני $f(x) = \frac{1}{1-x}$

אזי $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

ולכן הפתוח של $\frac{1}{(1-x)^2}$ יהיה:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

ורדיוס ההתכנסות יהיה כמו של הטור הקודם $-1 < x < 1$.

ניתן גם להגיע לטור הנ"ל ע"י שנכפיל את טור החזקות של $\frac{1}{1-x}$ בעצמו.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) =$$

$$= 1 + (1+1)x + (1+1+1)x^2 + \ldots = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

דרך נוספת להגיע לטור הזה היא לפתח לטור גאומטרי את פונקציה $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{1-(2x-x^2)} = 1 + (2x-x^2) + (2x-x^2)^2 + (2x-x^2)^3 + \ldots$$

דוגמה נוספת:

כפי שנראה בהמשך הטור של $\cos x$ הוא:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

מכאן נוכל למצא הטור של $\sin x$ ע"י שנגזור שני האגפים:

$$-\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots$$

כלומר: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

שים לב: אם נגזור שוב נקבל הטור של $\cos x$!

הערות:
1) תהליך הגזירה יכול לחזור מספר פעמים כלשהו ולכל נגזרת יהיה אותו רדיוס התכנסות כמו הטור המקורי.
2) בנקודת קצה טור חזקות יכול להתכנס אך טור הנגזרות עלול להתבדר.

ו. טור חזקות שסכומו f(x) ניתן לבצע עליו אנטגרציה אבר אבר בין גבולות הנמצאים באנטרוול ההתכנסות. הטור החדש מיצג את האנטגרל של f(x) בין אותן גבולות.

לדוגמה:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

המתכנס באנטרוול $-1 < x < 1$
אם נבצע אנטגרל של שני האגפים

$$\int_0^u \frac{dx}{1+x} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

וזה המתכנס באנטרוול $-1 < u < 1$

מצד שני $\int_0^u \frac{dx}{1+x} = \ln(1+u)$

כלומר $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$

או אם נציב $u = x$ נקבל $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

עבור $-1 < x < 1$
עבור $x = 1$ מקבלים הטור

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

וזה מתכנס ל- ln2. כלומר הטור ההרמוני המתחלף מתכנס ל- ln2:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2$$

ואילו עבור $x = -1$ מקבלים התבדרות!!!
כך שהטור מתכנס ברווח $-1 < x \le 1$

ז. נתונים שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
השווים לכל x ברווח ההתכנסות אזי קיים $a_n = b_n$ לכל n.
משמעות משפט זה (שהבאנו ללא הוכחה) שלפונקציה f(x) נתונה יש רק טור חזקות <u>אחד</u> המיצג אותה. כמסקנה של המשפט הנ"ל אפשר לראות כי אם

קיים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ לכל x ברווח ההתכנסות אזי $a_n = 0$ <u>לכל n.</u>