19. פתוח פונקציה מורכבת לטור.

נפתח לטור מקלורן $y=\sin^2 x$

יש קשיים בנגזרת של $\sin^2 x$ ונקבל ביטוים מסובכים ולכן כדאי לעשות
פתוח ל- $\sin x$ ולהכפיל טורי חזקות לפי הכלל שלמדנו

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

$$\sin^2 x = (x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots)^2 = \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)=$$

$$=x^2-\frac{2x^4}{3!}+\frac{2x^6}{5!}+\frac{x^6}{(3!)^2}+O(x^8)$$

דוגמה נוספת

$$f(x)=e^{\sin x}$$

אם נפתח סביב $x=0$ בדרך הרגילה נתקל בבעיות

$$f'(x)=e^{\sin x}\cos x$$

$f''(x)$ מכפלה

וכו' קשיים רציניים
אולם נעשה הטור הבא

נגדיר $y=e^U$

ונעשה פתוח של פו' זו סביב $U=0$ ונזכור אח"כ $U=\sin x$

$$e^U=1+U+\frac{U^2}{2!}+\frac{U^3}{3!}+\dots$$

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\dots$$

אבל אנו מעונינים בפתוח בחזקות של x ולכן נציב

$$\sin x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

ונחליט על חזקה מכסימלית וצויה לנו נניח x^5 ואז נקבל

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^3+$$

$$+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^5+\text{זורקים}=$$

$$=1+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{2!}(x^2-\frac{2}{3!}x^4)+\frac{1}{3!}(x^3-\frac{3}{3!}x^5)+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5=$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2-x^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)+x^5\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{(3!)^2}\right)+O(x^6)$$

19.1 שימושים.

נביא עתה מספר דוגמאות לשמושים של פתוח לטור לצורך חשוב
אנטגרלים:

1) נחשב $\int_0^m dx\sin(x^2)$

אנטגרל זה לא ניתן לחשב בשיטות רגילות ולחשב מדויק. אך אם נדון

בפונקציה $\sin(x^2)$ ונפתחה לטור בחזקות של x^2 נקבל $\sin(x^2) = x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \ldots$

$$\int_0^m dx\,\sin(x^2) == \int_0^m (x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \ldots)dx$$

$$= \frac{m^3}{3} - \frac{m^7}{7\cdot 3!} + \frac{m^{11}}{11\cdot 5!} - \ldots$$

וזה טור המתכנס מאוד מהר וניתן לחשב איפוא את האנטגרל בקרוב טור מהר מאוד.

לדוגמה: אם $m = 1$ מקבלים $= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \ldots = 0.333 - 0.02381 + 0.00076 - \ldots$

2) נחשב $\int_0^m \frac{\sin x}{x}dx$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

$$\int_0^m \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^m (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots)dx = m - \frac{m^3}{3\cdot 3!} + \frac{m^5}{5\cdot 5!} - \frac{m^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

וגם טור זה מתכנס מהר מאוד.

3)

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}}dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots\right)dx =$$

$$= 3!\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right)$$

ואף טור זה מתכנס מהר.

אנטגרציה בחלקים: $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

4) העזר בפתוח לטור בחישוב $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x + \frac{2x^3}{3!} + \ldots}{x - \frac{x^3}{3!} + \ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{2 + \frac{2x^2}{3!}}{1 - \frac{x^2}{3!}} = 2$$

5) פתח את $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ לחזקות של $x - 3$

$$f(3) = 3^4 - 11\cdot 3^3 + 43\cdot 3^2 - 60\cdot 3 + 14 = 5$$

$$f'(3) = 4\cdot 3^3 - 33\cdot 3^2 + 86\cdot 3 - 60 = 9$$

$$f''(x) = 12x^2 - 66x + 86$$

$$f''(x) = 12\cdot 3^2 - 66\cdot 3 + 86 = -4$$
$$f'''(x) = 24x - 66$$
$$f'''(3) = 6$$
$$f^{(4)}(3) = 24$$
$$f^{(5)\dots}(3) = 0$$

ולכן

$$f(x) = 5 + 9(x-3) - \frac{4}{2!}(x-3)^2 + \frac{6}{3!}(x-3)^3 + \frac{24}{4!}(x-3)^4$$

6) הוכח

$$\int_0^x e^{-y^2}dy = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots$$

נפתח e^{-y^2} סביב האפס

$$f(z) = e^{-y^2} = e^{-z} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(z) = -e^{-z} \qquad f'(0) = -1$$
$$f''(z) = e^{-z} \qquad f''(0) = 1$$
$$f'''(z) = -e^{-z} \qquad f'''(0) = -1$$

ולכן

$$e^{-y^2} = e^{-z} = 1 - z + \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 - \dots$$
$$\int_0^x e^{-y^2}dy = \int_0^x (1 - y^2 + \frac{1}{2!}y^4 - \frac{1}{3!}y^6 + \frac{1}{4!}y^8 - \dots)dy =$$
$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

נבדוק רדיוס ההתכנסות

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)(n+1)!}{(2n+1)n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(n+1)}{2n+1} = \infty$$

ולכן הפתוח נכון לכל x.

<u>19.2 משפט אוילר</u>

ראינו כי הפתוח בחזקות של z של הפונקציה e^z הוא:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

והוא מתכנס לכל z ממשי.

למרות שלא הגדרנו את e^z עבור z מרוכב.

הרי נוהגים באמצעות אגף ימין של הפתוח לטור <u>להגדיר</u> e^z לכל z מרוכב.
ז"א

$$e^{(a+ib)} = 1 + (a+ib) + \frac{(a+ib)^2}{2!} + \frac{(a+ib)^3}{3!} + \dots$$

נבדוק עבור $z = iy$ מדומה כאשר y ממשי.

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots =$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots$$

אם נפריד את החלקים הממשים והמדומים של הטור נקבל:

$$e^{iy} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots)$$

ונוכל לזהות עתה באגף ימין את הפתוח של $\cos y$ ו $\sin y$ עבור y ממשי

כלומר $\underline{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$

לכל y ממשי.

נוסחה זו ידועה בשם **משפט אוילר**.

ז"א הפונקציה האקספוננציאלית קשורה לפו' הטריגונומטריות בדרך הנ"ל.

אם נקח אקס' של מספר מרוכב נקבל $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

אם נציב במקום y,y- נקבל

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

ומכאן ע"י חבור נקבל

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y$$

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y$$

וע"י חסור

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i \sin y$$

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y$$

הקשרים בין הפונקציות ההפרבוליות לטריגונומטריות.

$$\sin(ix) = i \sinh x$$

$$\cos(ix) = \cosh x$$

$$tg(ix) = i \ tgh\, x$$

$$\cot(ix) = -i \coth x$$

מנוסחאות אחרונות אלו אפשר לקבל ביטוים טריגונומטריים נוספים באמצעות פו' אקספוננציאליות.

19.3 סיכום טורים אינסופיים

למדנו שלושה מבחנים להתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

מבחן האנטגרל $\int_a^{\infty} f(x)dx$

אם האנטגרל מתכנס גם הטור מתכנס ולהפך. אם האנטגרל מתבדר גם הטור.

לדוגמה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{\infty} U\, dU = \infty$$

ולכן הטור מתבדר.

באופן כללי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$

אם $k<1$ הטור מתכנס

אם $k\leq 1$ הטור מתבדר.

מבחן ההשואה.

$\sum a_n$ מתכנס אם $\sum c_n$ מתכנס ו- $c_n \geq a_n$

ולהפך $\sum a_n$ מתבדר אם $\sum c_n$ מתבדר ו- $c_n \leq a_n$ לכל n.

לדוגמה:

$$1+\frac{2^2+1}{2^3+1}+\frac{3^2+1}{3^3+1}+\ldots$$

האבר הכללי $\frac{n^2+1}{n^3+1}\geq\frac{1}{n}$

שכן: $n^3+n\geq n^3+1$

ולכן הטור מתבדר שכן הטור ההרמוני מתבדר.

מבחן המנה של דלמבר.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ מתכנס

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ מתבדר

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ אין אינפורמציה.

לדוגמה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$$a_n=\frac{n^n}{n!}\qquad\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{e}$$

מקבלים שהטור מתכנס.

19.4 סיכום טורים עם אברים מתחלפים

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

לייבניץ אם קיים $a_n>a_{n+1}$ ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי הטור מתכנס.

דוגמה: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

טור מתכנס מקיים את 2 התנאים.

התכנסות בהחלט אם טור הערכים המחלטים מתכנס.

והתכנסות בתנאי אם הטור מתכנס וטור הערכים המחלטים מתבדר.

מבחן המנה להתכנסות בהחלט

אם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ הטור מתכנס

ואם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ הטור מתבדר.

19.5 סיכום טורי חזקות

$\sum a_n x^n$

רדיוס ההתכנסות ניתן ע"י $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

דוגמאות:

מצא רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}(3n+2)}{2^n(3n-1)(n+1)}=2$$

$$|x-1|<2$$

$$-2<x-1<2$$

$$-1<x<3$$

מה קורה בקצוות

$x=\pm 3$ הטור מתבדר

כי האבר הכללי לא שואף לאפס.

פתוח פו' לטור

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$$

אי אפשר לפתח אם אחת הנגזרות לא מוגדרת

דוגמאות

הוכח $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$

$f(x)=arctgx$ $\qquad f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad f'(0)=1$$

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots$$

$$f''(x)=-2x+4x^3-6x^5+8x^7$$

$$f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-2+12x^2-30x^4+\ldots$$

$$f'''(0)=-2$$

$$f^{(4)}(x)=24x-120x^3+\ldots$$

$$f^{(4)}(0)=0$$

$$arctgx = x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 - \ldots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

מהו הרדיוס ההתכנסות

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = 1$$

$-1 < x < 1$ רדיוס ההתכנסות

עבור $x = -1$ הטור הוא

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$$

הטור מתכנס בתנאי

עבור $x = 1$ הטור גם $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

מתכנס בתנאי.

פתח $e^{arct\,x}$ לטור חזקות ב- x

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{arctgx} = 1 + arctgx + \frac{(arctgx)^2}{2!} + \frac{(arctgx)^3}{3!} + \ldots$$

אבל אנו מעונינים בחזקות של x לכן

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^4 =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right)x^4 + \ldots$$