# 2. פונקציות

## 2.1. פונקציה וגרף

פונקציה היא כלל או חוק המתאים אברים של קבוצה אחת לאברים של קבוצה אחרת. אנו נטפל אך ורק בקבוצות של מספרים ממשיים. נסמן ב-$x$ משתנה היכול לקבל ערכים בין $-\infty$ עד $\infty$ (לאו דווקא את כולם). אזי, אם לכל ערך שיכול לקבל משתנה $x$ מתאים ערך אחד או יותר של משתנה $y$ אנו אומרים ש-$y$ היא **פונקציה** של $x$, וכותבים $y = f(x)$.

$x$ נקרא **משתנה בלתי תלוי**.
$y$ נקרא **משתנה תלוי**.
קבוצת הערכים ש-$x$ יכול לקבל קרויה **תחום ההגדרה** של הפונקציה.
אם לכל ערך של $x$ מתאים $y$ יחיד הפונקציה נקראת **חד-ערכית**. אם לערכי $x$ מסוימים מתאימים יותר מערך אחד של $y$ הפונקציה נקראת **רב-ערכית**.
אנו נעסוק בפונקציות חד-ערכיות אלא אם כן נציין אחרת.

**דוגמאות**

א. הפונקציה $y = -5x^3 + 16$ מוגדרת לכל $x$. תחום ההגדרה הוא איפוא כל המספרים הממשיים.

ב. נתונה הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - 5}$ , עבור פונקציה זו תחום ההגדרה (במסגרת המספרים הממשיים) הוא $x \geq \sqrt{5}$ ו- $x \leq -\sqrt{5}$.

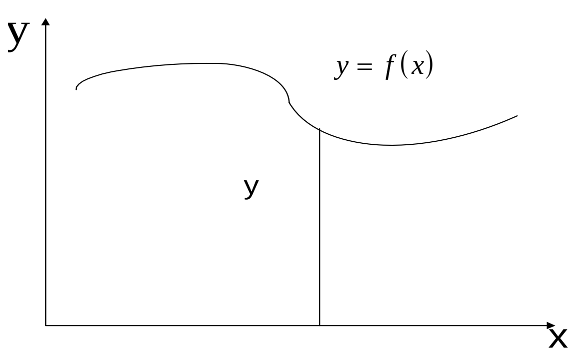
ג. הפונקציה $y^2 = x$ מוגדרת לכל $0 \leq x$. לכל x חיובי, יש שני ערכי $y$ , ולכן $y$ היא פונקציה דו-ערכית. נוכל להפריד אותה ל-2 פונקציות חד-ערכיות: $f(x) = +\sqrt{x}$ ו- $g(x) = -\sqrt{x}$.

ד. פונקציה אינה חייבת להיות מתוארת ע״י נוסחה. היא יכולה למשל להיות מתוארת בצורת טבלה. למשל טבלת חמום מים:

| זמן בדקות - t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| T - | $27° c$ | $28° c$ | $30° c$ | $34° c$ | $39° c$ |

### הצגה גרפית של פונקציה

אוסף הנקודות במישור $(x,y)$ המתקבלות ע״י הפונקציה $y = f(x)$ : $[x, f(x)]$ נקרא **הגרף** של הפונקציה, ראה איור 2.1.




**איור 2.1**: גרף של פונקציה

## 2.2. פונקציות חסומות

א. אם יש קבוע $M$ כך ש- $f(x) \le M$ לכל $x$ באינטרוול נאמר ש- $f(x)$ **חסומה_מלמעלה** באינטרוול ונקרא ל-$M$ **חסם מלעיל** של הפונקציה.

ב. אם קיים קבוע $m$ כך ש-$f(x) \ge m$ לכל $x$ באינטרוול נאמר ש- $f(x)$ **חסומה מלמטה** באינטרוול ונקרא ל-$m$ **חסם מלרע** של הפונקציה.

ג. אם קיים $m \le f(x) \le M$ לכל $x$ באינטרוול נאמר ש- $f(x)$ **חסומה**.

**דוגמה**: $f(x) = x - 5$ חסומה באינטרוול $-2 \le x \le 2$. חסם מלעיל הוא 3- (או כל מספר גדול ממנו), חסם מלרע הוא 7- (או כל מספר קטן ממנו). אולם הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינה חסומה באינטרוול $0 < x < 4$ שכן ע״י בחירת $x$ מספיק קרוב לאפס, ניתן להגדיל את $f(x)$ כרצוננו ואין חסם מלעיל. לעומת זאת $\frac{1}{4}$ הוא חסם מלרע.

אם ל- $f(x)$ יש חסם מלעיל, יש לה גם **חסם עליון**, אם יש לה חסם מלרע יש לה גם **חסם תחתון**. (ראה סעיף 1.9).

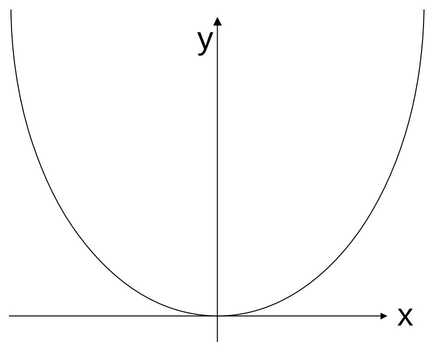
## 2.3. פונקציות הפוכות ערך ראשי

אם $y$ פונקציה של $x$ ונסמן $y = f(x)$, אזי $x$ הוא פונקציה של $y$ שנסמנה $x = f^{-1}(y)$.

אם נחליף בין $x$ ל-$y$ נקבל את הפונקציה $y = f^{-1}(x)$ הנקראת **הפונקציה ההפוכה**.

**לדוגמה** - אם הפונקציה היא $y = 3x - 4$, הרי שהפונקציה $x = \dfrac{y+4}{3}$ היא פונקציה זהה. את הפונקציה ההפוכה נקבל אם נחליף בין $x$ ל-$y$, דהיינו: $y = \dfrac{x+4}{3}$.

אם הפונקציה $f(x)$ היא חד-ערכית, עשויה הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x)$ להיות רב-ערכית.

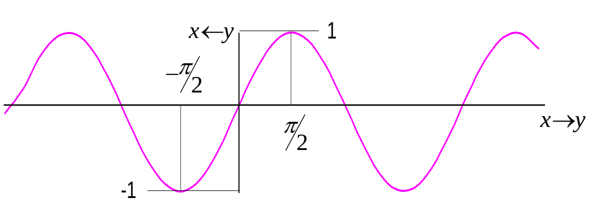



**איור 2.2**

למשל: הפונקציה $y = x^2$, (איור 2.2) ניתנת להכתב כ- $x = \pm\sqrt{y}$ והפונקציה ההפוכה היא $y = \pm\sqrt{x}$, כלומר היא רב ערכית.

במקרה זה ניתן לראות את הפונקציה ההפוכה כאוסף של פונקציות חד-ערכיות שכל אחת מהן קרויה **ענף**. בדרך כלל בוחרים את אחד הענפים וקוראים לו **ענף ראשי**, ואותו מסמנים ב- $f^{-1}(x)$. ערך הפונקציה ההפוכה נקרא **ערך ראשי.**

לדוגמה: הפונקציה - $y = \sin x$ הפונקציה ההפוכה היא $y = \sin^{-1} x$ שהיא רב-ערכית שכן לכל $x$ באינטרוול $-1 \le x \le 1$ יש ערכים רבים ל-$y$ (ראה איור 2.3).




**איור 2.3**

לו היינו מגבילים את הפונקציה $\sin^{-1} x$ להיות כזו ש- $-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$, למשל, הפונקציה תהפוך לחד-ערכית.

במקרה זה הערך הראשי של $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ יהיה $\frac{\pi}{6}$ ושל $\sin^{-1}(0)$ יהיה 0.

## 2.4. סוגי פונקציות

באנלוגיה לחלוקת המספרים הממשיים לקבוצות מחלקים גם את סוגי הפונקציות לקבוצות.

א. **פונקציות פולינומיאליות**

הפונקציה

$$\boxed{f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0} \quad \textbf{(2.1)}$$

נקראת **פונקציה פולינומיאלית** כאשר $a_0, a_1, \ldots, a_n$ קבועים ו-$n$ טבעי הנקרא **דרגת הפולינום** אם $a_n \neq 0$ .

ישנו משפט באלגברה הנקרא ״המשפט היסודי של האלגברה: **״לכל פולינום יש לפחות שורש אחד״** כלומר ישנו לפחות - פתרון אחד של המשוואה $f(x)=0$ , פתרון כזה נקרא שורש המשוואה.

בהסתמך על משפט זה מוכיחים שאם דרגת המשוואה היא $n$ יש למשוואה בדיוק $n$ שורשים, במסגרת קבוצת המספרים המרוכבים.

ב. **פונקציות אלגבריות**

פונקציות אלגבריות הן פונקציות $y=f(x)$ המקיימות משוואה מהטיפוס:

$$\boxed{P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+P_1(x)y + P_0(x)=0} \quad (2.2)$$

כאשר $P_0(x),\cdots,P_n(x)$ הם פולינומים ב-x.

אם ניתן לבטא את הפונקציה, y, כמנה של שני פולינומים - הפונקציה נקראת **אלגברית רציונלית**. אחרת היא נקראת **אלגברית אי-רציונלית**.

**שים לב**: קבוצת הפונקציות הפולינומיאליות היא קבוצה חלקית לאלגבריות רציונליות שהיא בעצמה קבוצה חלקית לאלגבריות.

**דוגמה:** נבדוק האם $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ כאשר $x\neq -1$ היא פונקציה אלגברית:

$$(x+1)y-1=\sqrt{x} \quad \Leftarrow \quad y=\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$$

כעת נעלה בריבוע את שני האגפים: $(x+1)^2 y^2 - 2(x+1)y + 1 = x$

ונקבל: $$(x+1)^2 y^2 - 2(x+1)y + 1 - x = 0$$

כלומר קיבלנו משוואה פולינומיאלית ב-y כאשר המקדמים הם פולינומים ב-x. כלומר הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אלגברית. אולם מכיוון שאינה ניתנת לכתיבה כמנה של שני פולינומים היא פונקציה אלגברית אירציונלית.

**הערה:** שים לב לדמיון ההגדרה למספרים רציונליים ואירציונליים.

ג. **פונקציות טרנסצנדנטיות**

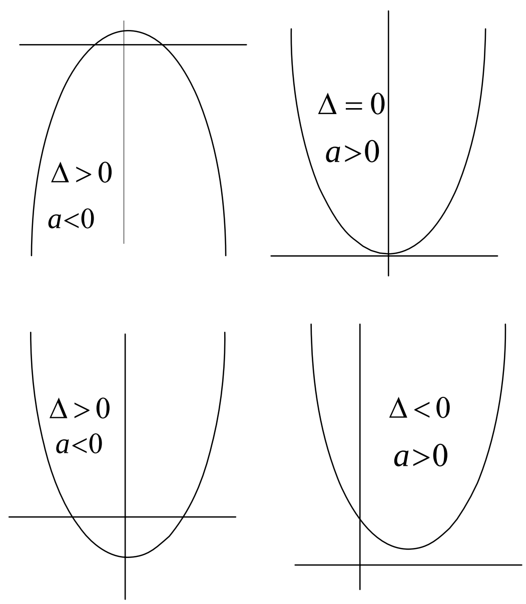
פונקציות טרנסצנדנטיות הן פונקציות שאינן מקיימות את המשוואה $(\mathbf{2.2})$ לעיל.

## 2.5. דוגמאות לפונקציות פולינומיאליות

- משוואת **ישר**: $y = ax + b$, כאשר $a$ הוא שפוע הישר ו- $b$ נקודת החיתוך של הישר עם ציר y.
צורות אחרות של הישר: $y - y_1 = a(x - x_1)$, זוהי משוואת ישר ששפועו $a$ ועובר דרך הנקודה (x,y).
המשוואה $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ היא משוואת ישר שעובר דרך הנקודות $(x_1, y_1)$ ו- $(x_2, y_2)$.

- משוואת **פרבולה**: $y = ax^2 + bx + c$. נקודת חתוך ציר $y$ ע"י הצבה $x = 0$, וציר $x$ ע"י פתרון המשוואה $y = 0$. אם $a > 0$ יש לפרבולה נקודת מינימום. אם $a < 0$ יש לה נקודת מקסימום.
הסבר: אם $a > 0$ הפונקציה שואפת לאינסוף עבור $x \to \pm\infty$, ולכן אם יש נקודה קיצונית היא חייבת להיות מינימום, ואם $a < 0$ הפונקציה שואפת ל $-\infty$, ולכן אם יש נקודה קיצונית היא חייבת להיות מכסימום, ראה איור 2.4.

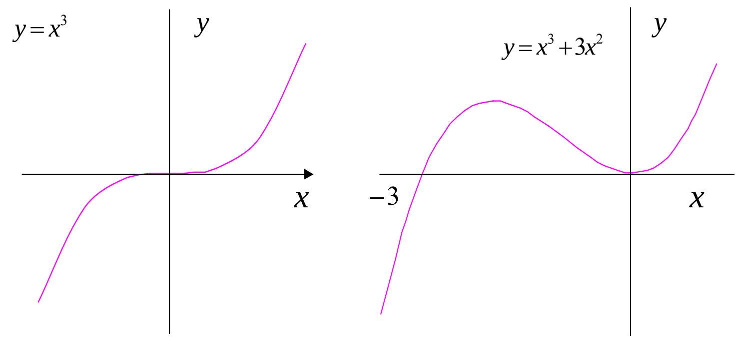
נגדיר $\Delta = b^2 - 4ac$, הנקרא **דיסקרימיננטה**. אם $\Delta > 0$ הפרבולה חותכת את ציר $x$ פעמיים. אם $\Delta = 0$ הפרבולה משיקה לציר $x$ (מלמעלה או מלמטה). ואם $\Delta < 0$ הפרבולה אינה חותכת את ציר $x$ כלל. קואורדינטת x של נקודת הקיצון של הפרבולה הן:
$x_m = -\frac{b}{2a}$, וע"י הצבה ניתן להגיע ל-$y$.




**איור 2.4**: צורות של פרבולות

- משוואה **ממעלה שלישית**: $y = x^3$ או באופן כללי $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. הפונקציה שואפת לאינסוף כאשר $x$ שואף לאינסוף: $y_{(x\to\infty)} = \pm\infty$ (סימן ה-$\pm$ הוא בהתאם לסימן של המקדם a של $y^3$) ולכן גם: $y_{(x\to-\infty)} = \mp\infty$ (ושוב - לפי סימנו של $a$).

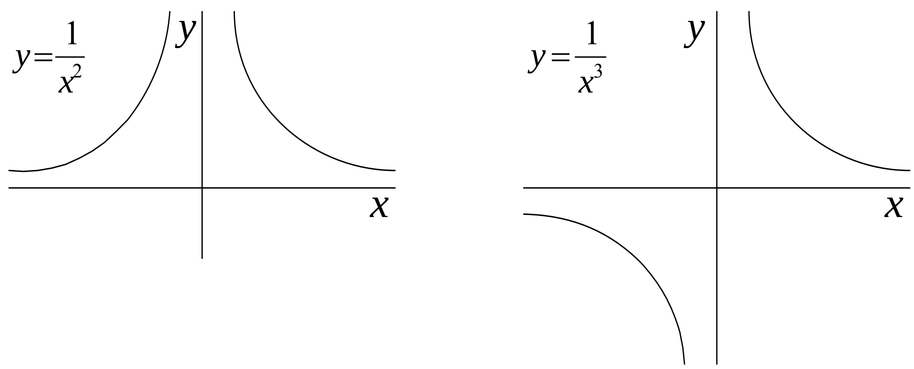
למשל:




**איור 2.5**: צורות של משוואות ממעלה שלישית

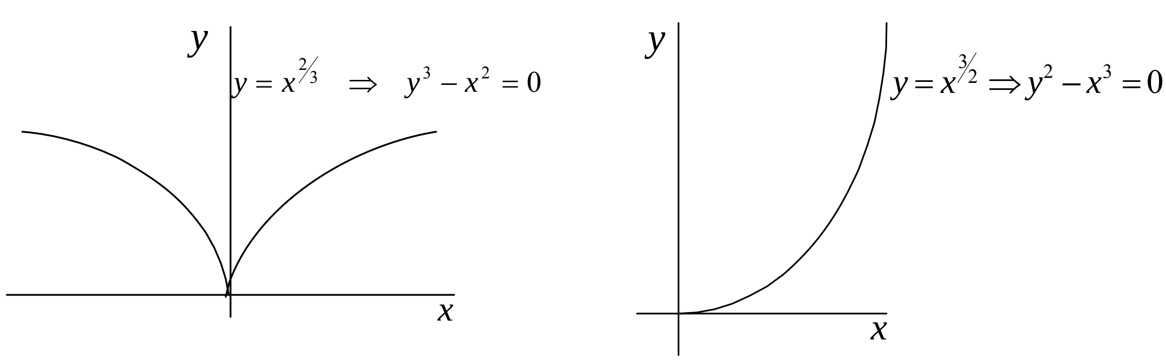
## **2.6. דוגמאות לפונקציות אלגבריות**

באיור 2.6 מובאות שתי דוגמאות לפונקציות אלגבריות רציונליות.

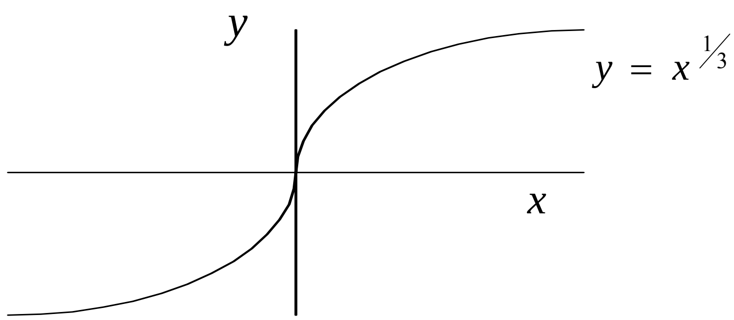



**איור 2.6**: דוגמאות לפונקציות אלגבריות רציונליות

אלה פונקציות אלגבריות רציונליות.
באיור 2.7 נראה דוגמאות לפונקציות אלגבריות אי-רציונליות:




**איור 2.7**: דוגמאות לפונקציות אלגבריות אירציאנליות



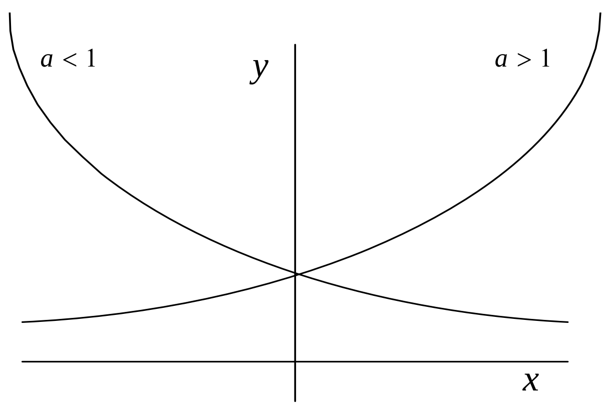

**איור 2.7:** דוגמאות לפונקציות אלגבריות אירציאנליות

## <u>2.7 דוגמאות לפונקציות טרנסצנדנטיות</u>

להלן נביא מספר דוגמאות לפונקציות שאינן אלגבריות דהיינו טרנסצנדנטיות.

א. **הפונקציה המעריכית** : $f(x) = a^x$ כאשר מתקיים $a \neq 1$ $a > 0$ .

פונקציה זו מוגדרת לכל ערך של $x$. תאורה הגרפי :



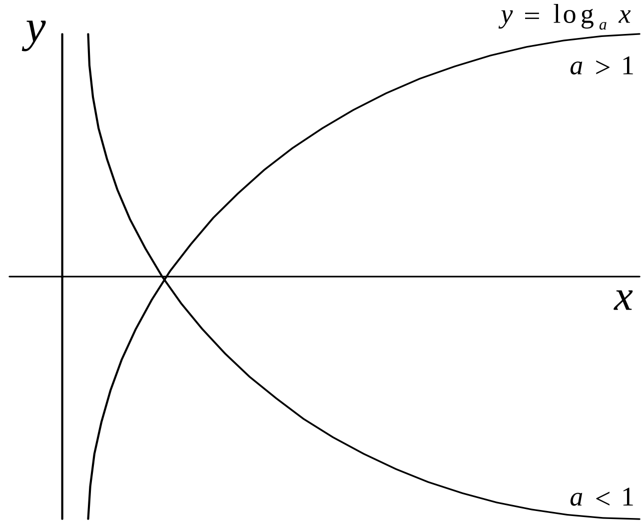

**איור 2.8** : הפונקציה המעריכית

ב. **הפונקצה הלוגריתמית** : $f(x)=\log_a x$ כאשר $a>0$ $a\neq 1$

פונקציה זו והפונקציה המעריכית הן הפוכות זו לזו : שהרי $x=a^y \;\Rightarrow\; y=\log_a x$

והפונקציה ההפוכה היא $y=a^x$ .

תאורה הגרפי :




**איור 2.9** : הפונקציה הלוגורימית.

אם הבסיס הוא $a=\mathbf{e}=2.71828...$ שהוא **בסיס הלוגריתמים הטבעי** אזי כותבים $f(x)=\log_{\mathbf{e}} x\equiv \ln x$ , והוא נקרא **הלוגריתמוס הטבעי** של $x$.

ג. **הפונקציות הטריגונומטריות**

נוסחאותיהן :

$$y=\sin x \qquad y=\cos x$$

$$y=\tan x\equiv \operatorname{tg} x\equiv \frac{\sin x}{\cos x} \qquad y=\cot x=\frac{1}{\tan x}$$

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x} \qquad y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

בד״כ נהוג לבטא את המשתנה $x$ ברדיאנים. לקשרים טריגונומטרים נוספים ראה דף נוסחאות בסוף הספר.

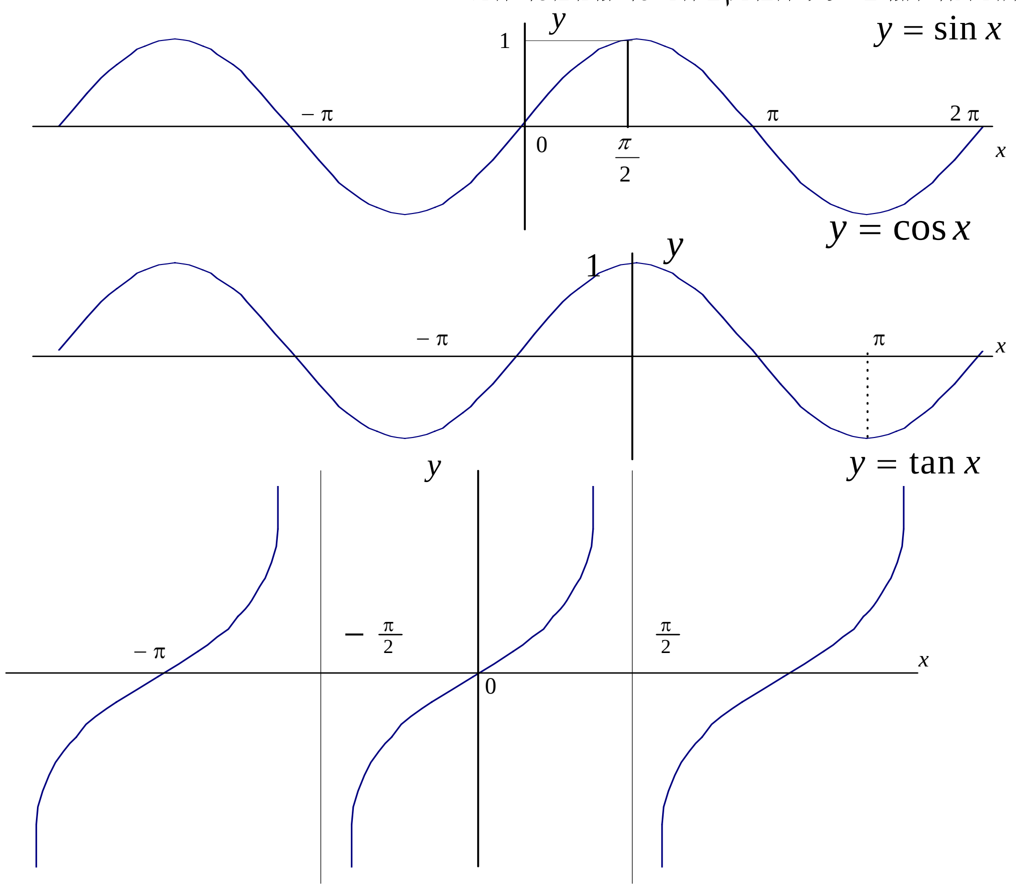
כל הפונקציות הטריגונומטריות הן מחזוריות. נביא הגדרה כללית לפונקציה מחזורית.

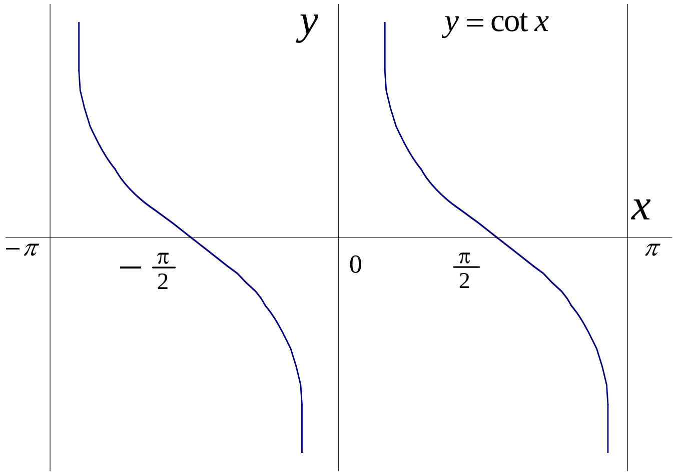
**הגדרה:** הפונקציה $y = f(x)$ תקרא מחזורית אם קיים קבוע $c$ שכאשר נוסיף אותו לארגומנט x לא ישתנה ערך הפונקציה; כלומר: $f(x+c) = f(x)$.
הקבוע הנמוך ביותר הזה נקרא מחזור הפונקציה.

מהגדרת הפונקציה הטריגונומטרית נובע שהמחזור של $y = \sin x$ הוא $2\pi$ שכן $\sin(x+2\pi) = \sin x$; וזהו גם המחזור של $\cos x$.

המחזור של הפונקציות $y = \tan x$ ו- $y = \cot x$ הוא π.

התיאור הגרפי של הפונקציות טריגונומטריות:






**איור 2.10** : הפונקציות הטריגונומטריות

**הערה:** הפונקציות $\sin x, \cos x$ מוגדרות לכל $x$. הפונקציות $tgx, \cot x$ לא מוגדרות לכל $x$.

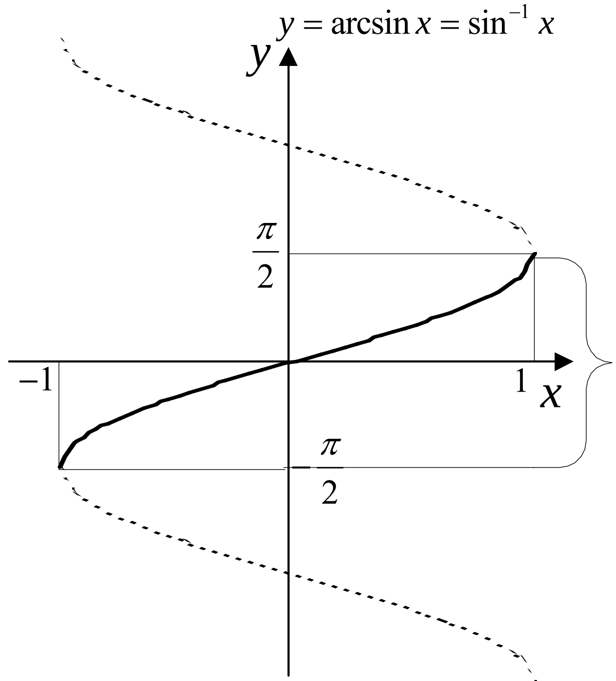
ד. **פונקציות טריגונומטריות הפוכות**

- הפונקציה $y=\sin^{-1} x$ היא פונקציה ההפוכה לפונקציה $y=\sin x$. היא נכתבת גם כ- $y=\arcsin x$. משמעותה: y היא הזוית ברדיאנים שהסינוס שלה הוא x. הפונקציה היא רב-ערכית (ראה איור 2.10 עבור $y=\sin x$) ולכן בוחרים כערך ראשי את התחום $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.
- $y=\cos^{-1} x=\arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y=\cos x$ בוחרים ערך ראשי בתחום: $0\le y\le\pi$. שים לב: כאן לא ניתן לבחור אותו תחום לערך ראשי כמו עבור $y=\arcsin x$, כיון שבתחום זה הפונקציה רב ערכית.
- $y=\tan^{-1} x=\arctan x$, ערך ראשי: $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.
- $y=\cot^{-1} x=arc\cot x$, ערך ראשי: $0<y<\pi$.
- $y=\csc^{-1} x=\sin^{-1}(\frac{1}{x})$, ערך ראשי: $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.

(הכתיבה האחרונה נובעת מכך ש- $\frac{1}{x}=\sin y \Leftarrow x=\frac{1}{\sin y}=\csc y$)

- $y=\sec^{-1} x=\cos^{-1}(\frac{1}{x})$ ערך ראשי: $0\le y\le\pi$

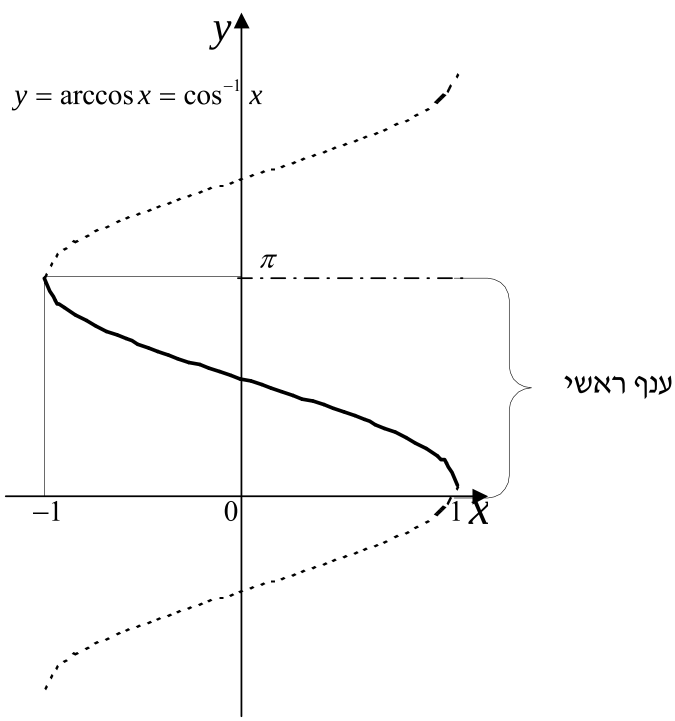
**דוגמאות**: 1. נתבונן בפונקציה $y=\arcsin x$. משמעותה: מהי הזוית y שהסינוס שלה x? תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-1\le x\le 1$. הפונקציה היא רב-ערכית. לכל ערך של x מתאימים $\infty$ ערכי y. בחרנו את הערך הראשי (או הענף הראשי) כך שעבור כל $x$ יהיה רק ערך אחד לפונקציה.




| $y$ | $x$ |
|---|---|
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 1/2 |
| 0 | 0 |
| $-\frac{\pi}{6}$ | 1/2- |
| $-\frac{\pi}{2}$ | 1- |

**איור 2.11**:
הפונקציה $y = \arcsin x$

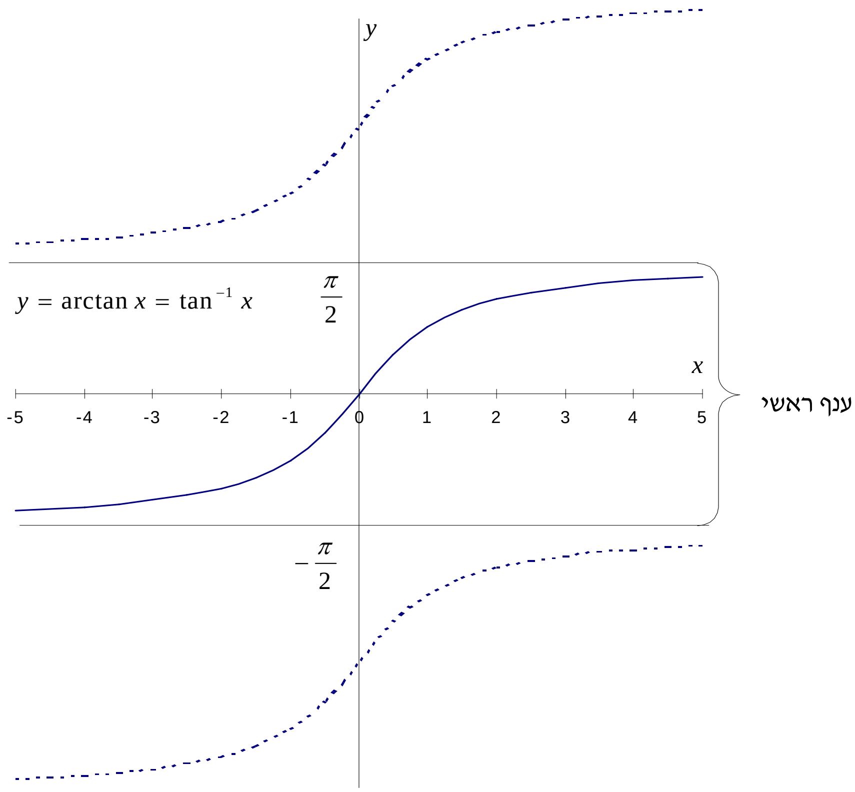
ב. נשרטט את הפונקציה $y = \arccos x$




| $y$ | $x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 1/2 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 |
| $\frac{2\pi}{3}$ | 1/2- |
| $\pi$ | [illegible] |

**איור 2.12**: הפונקציה $y = \arccos x$

ג. נשרטט את הפונקציה $y = \arctan x$. לכל $x$ יש אינסוף ערכי $y$ ולכן אנו מגבילים את עצמנו לענף הראשי בתחום: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. כאן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-\infty < x < \infty$.




**איור 2.11**