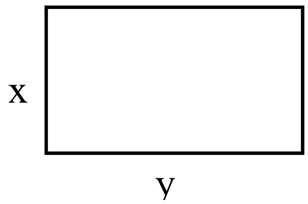
20. נגזרות חלקיות:



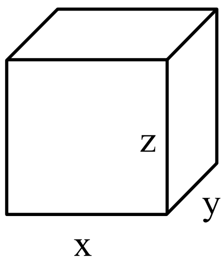
איור 20.1

עד כה דנו בפונקציות שלהם משתנה בלתי תלוי אחד y=f(x) .
ישנם הרבה דוגמאות במדע של גדלים
התלויים בשניים או יותר משתנים בלתי תלויים.
לדוגמה: שטח מלבן היא פונקציה של רוחבו וארכו.

S=xy

מסה של תיבה היא פונקציה של ארכה, רחבה, גבהה וצפיפותה (משקל סגולי)

M= ρ **xyz**

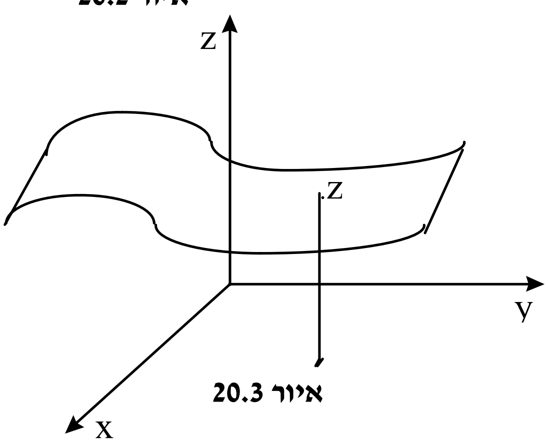


איור 20.2

אם z היא פונקציה של שני משתנים x ו- y נכתוב z=z(x,y)
או אם U פונקציה של 3 משתנים z,y,x
נכתוב $U = u(x,y,z)$ וכדומה.

20.1 הגדרת נגזרות חלקיות:

פונקציה של שני משתנים z=f(x,y) ניתנת לתאור גיאומטרי כמשטח במרחב תלת ממדי. לכל נקודה (x,y) במישור מתאימה נקודה z במרחב התלת ממדי (ראה איור).
תהי z פונקציה של שני משתנים בלתי תלויים x ו- y z=f(x,y) נניח y קבוע אזי z היא פונקציה של x בלבד.
ניתן למצוא נגזרת של z לפי x . תוצאה זו נקראת נגזרת חלקית של z לפי x ומסומנת ע"י $\frac{\partial z}{\partial x}$.
ההגדרה המתמטית של נגזרת חלקית:



איור 20.3

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}} \qquad \textbf{(20.1)}$$

משמעותו הנגזרת חלקית לפי x היא היחס בין גידול הפונקציה לבין Δx כאשר y לא משתנה (נשאר קבוע) בגבול $\Delta x \to 0$. זוהי מדת הגידול של הפונקציה לפי x . באותו אופן ניתן להגדיר הנגזרת החלקית של הפונקציה לפי y :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}} \qquad \textbf{(20.2)}$$

שים לב :
כי במקרה (20.1) גוזרים לפי x כאשר y קבוע. ובמקרה (20.2) גוזרים לפי y כאשר x קבוע.

דוגמאות:

(1

$$z = 5x^3y - 2x^2y^2 + 9y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y3x^2 - 2y^2 2x = 15yx^2 - 4xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 - 2x^2 2y + 36y^3 = 5x^3 - 4yx^2 + 36y^3$$

2)

$$z=\ln(y^2+x^2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{2x}{y^2+x^2} \qquad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{2y}{y^2+x^2}$$

3)

$$\mathrm{z}=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{1\cdot\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,x\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2+x^2}$$

לעתים הפונקציה של שני משתנים בלתי תלויים אינה מפורשת אלא כתובה בצורה סתומה F(x,y,z)=0 ואז מוצאים את הנגזרות החלקיות לפי הדוגמה הבאה:

נתונה הפונקציה הסתומה:

$$5x^3yz^2+11y^4\mathrm{z}+z^5-10=0$$

נחשב: $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$; $\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$

נניח y קבוע ונגזור האגפים לפי x ונקבל:

$$15x^2yz^2+5x^3y2z\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}+11y^4\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}+5\mathrm{z}^4\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}=0$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}=-\frac{15x^2yz^2}{10x^3yz+11y^4+5z^4}$$

נניח x קבוע ונגזור שני האגפים לפי y ונקבל:

$$5x^3z^2+5x^3y2z\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}+11\cdot 4y^3\mathrm{z}+11y^4\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}+5\mathrm{z}^4\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}=0$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}=-\frac{5x^3\mathrm{z}^2+44y^3\mathrm{z}}{10x^3yz+11y^4+5z^4}$$

20.2 המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת החלקית

נניח שבאיור מתוארת פונקציה

$z = f(x,y)$ אם ניקח $y = y_0$

קבוע נקבל z פונקציה של x

בלבד על הקו המתואר ע"י KL.

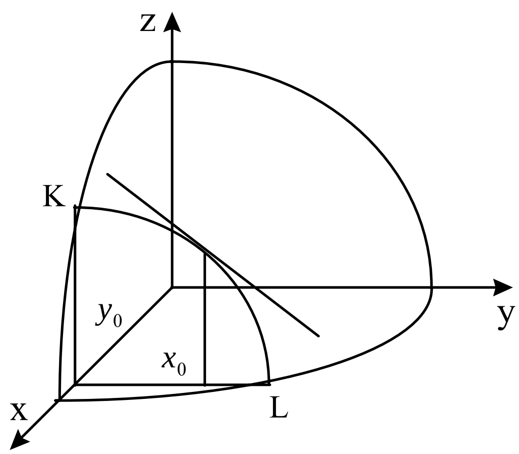
הנגזרת החלקית $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=y_0}$

תהיה אפוא השיפוע של הקו הזה

בכל נקודה x. השיפוע של הקו

ב- (x_0, y_0) יהיה: $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.

באופן כללי $\frac{\partial z}{\partial y}$ הוא השיפוע של



איור 20.4

קו הנחתך מהמשטח z=f(x,y)

ע"י מישור מקביל למישור xz.

באופן דומה $\frac{\partial z}{\partial x}$

הוא השיפוע של הקו הנחתך מהפונקציה z=f(x,y) ע"י מישור מקביל למישור yz.

20.3 נגזרות חלקיות מסדרים גבוהים.

אם נתונה פונקציה z=f(x,y) אז ברור ש $\frac{\partial z}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial y}$ הם בדרך כלל פונקציה של x ו-y. פונקציות אלו אפשר גם לגזור חלקית לפי x ולפי y.

לדוגמה: נגזור את $\frac{\partial z}{\partial x}$ חלקית לפי x.

מסמנים:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

וגודל זה נקרא **הנגזרת החלקית השניה** של z לפי x.

באופן דומה:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

אפשר גם לגזור את $\frac{\partial z}{\partial x}$ חלקית לפי y, אז מקבלים:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

שהיא **הנגזרת החלקית השניה של z** לפי x ו y.

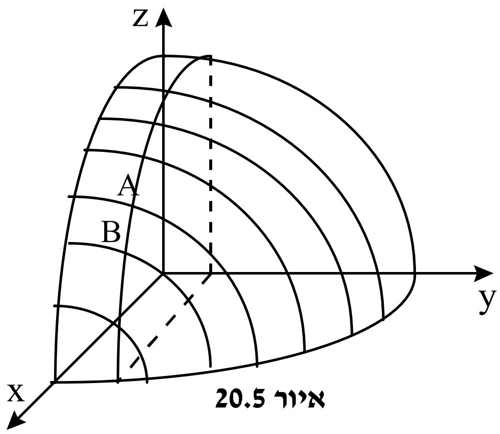
כ״כ, קיימות נגזרות מעורבות,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

משמעות גאומטרית של הנגזרות הללו:

לדוגמה $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ משמעותו השנוי היחסי בשפוע $\frac{\partial z}{\partial y}$ כאשר משנים את y ב-$\Delta y \to 0$ ו-x נשאר קבוע.

הנגזרת המעורבת $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ היא השנוי היחסי בשפוע $\frac{\partial z}{\partial y}$ כאשר משנים את x ב-$\Delta x \to 0$ ושומרים על y קבוע, דהינו מנקודה A עוברים לנקודה B (ראה איור).



איור 20.5

אפשר **להוכיח** כי אם הפונקציה z היא רציפה והנגזרות הן פונקציות רציפות אז:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

לדוגמה: נתונה הפונקציה $z=\sin(2x+3y)$

חשב: 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2\cos(2x+3y)$ $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-6\sin(2x+3y)$,

2) $\frac{\partial z}{\partial y}=3\cos(2x+3y)$ $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6\sin(2x+3y)$

באופן דומה קל להגדיר גדלים כמו:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$$

או:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$$

לדוגמה:

נתונה הפונקציה: $U=x^2yz^3+z^6$

חשב:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x\partial y\partial z^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=3x^2yz^2+6z^5$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=6x^2yz+30z^5$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial y\partial z^2}=6x^2z$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y \partial z^2} = 12xz$$