21. הדיפרנציאל השלם של פונקציה.

נגדיר כדיפרנציאל השלם את השינוי בפונקציה הודות לשינוי זעיר ב-x ב- Δx ולשנוי זעיר ב-y ב- Δy

כלומר:

$$\Delta f = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right) = \left[f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x+\Delta x, y\right)\right] + \left[f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x,y\right)\right]$$

אם נכפיל באגף ימין את האבר הראשון ב- Δy ונחלק ב- Δy וכן ניקח $\Delta y \to 0$ וכן באבר השני נכפיל ונחלק ב- Δx נקבל:

$$\boxed{df = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} dy + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} dx} \qquad \textbf{(21.1)}$$

כלומר השינוי בפונקציה f(x,y) הודות לשינויים *אינפיניטסימליים* ב- y וב-x ניתן ע"י הנוסחה הנ"ל. גודל זה נקרא **דיפרנציאל שלם.**

הערה: נוסחה (3) אינה מדויקת עבור dx ו- dy סופיים. ככל ש dx ו- dy קרובים יותר ל0- הנוסחה יותר מדויקת. זה נובע מהעובדה ש $\frac{\partial f}{\partial y}$ חושב בנקודה $x+dx$ ולא בנקודה x.

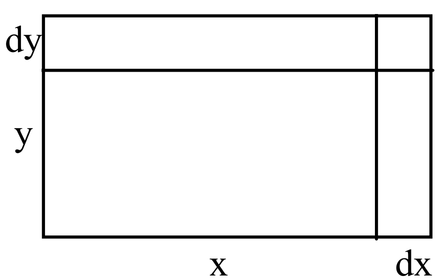
באופן כללי אם נתונה פונקציה U=U(x,y,z,...t)

אזי הדפרנציאל השלם שלה יהיה:

$$dU = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} dy + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}} dz + \ldots + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} dt$$

לדוגמה: נתונה פונקציה המתארת שטח מלבן z=xy השינוי בשטח המלבן הודות לשינוי באורך וברוחב יהיה, לפי נוסחה (21.1):

$$dz = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} dy = ydx + xdy$$



איור 20.6

נבדוק עתה בדרך אחרת, נוסיף ל x - dx ול- y - dy . שטח של המלבן החדש יהיה:

z = (x + dx)(y + dy)=xy + xdy + ydx + dxdy

כלומר השנוי בשטח המלבן:

dz = xdy + ydx + dxdy

ואילו אנו קבלנו:

dz = xdy +ydx

כפי שראינו למעלה הנוסחה שלנו מקורבת ומזניחים אברים מסדר גודל dxdy שהם קטנים ביותר כאשר dx ו-dy הם ***אינפיניטסימליים.***

דוגמה:

נתונה הפונקציה:

$$z = x^2 y^2 + 2xy - 5x^4 - 11y^2$$

$$dz = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} dy$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = 2xy^2 + 2y + 20x^3$$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = 3x^2 y^2 + 2x - 22y$$

$$dz = (2xy^3 + 2y - 20x^3)dx + (3x^2y^2 + 2x - 22y)dy$$

נביא עתה שתי **דוגמאות שימושיות:**

1. ההספק הנבלע בנגד חשמלי בעל התנגדות R (אום) שהמתח עליו V (וולטים)
ניתן ע"י $P=\frac{V^2}{R}$ (ווט).
נתון $V=200$ (וולט) ו $R=8$ (אום).
מה יהיה השנוי בהספק אם מקטינים את V ב-5 וולט ואת R ב-0.2 אום?

__פתרון:__

$$\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{2V}{R} \qquad dP=\frac{\partial P}{\partial V}dV+\frac{\partial P}{\partial R}dR$$

$$\frac{\partial P}{\partial R}=-\frac{V^2}{R^2} \qquad dP=\frac{2V}{V}dV-\frac{V^2}{R^2}dR$$

נציב:

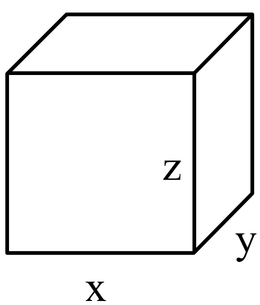
$$dR=-0.2 \qquad dV=-5 \qquad R=8 \qquad V=200$$

ונקבל:

$$dP=\frac{400}{8}(-5)-\frac{200^2}{8^2}(-0.2)=-250+125=-125$$

תשובה: ההספק יורד ב 125 ווט בקרוב.

2. ממדיו הנתונים של תיבת עץ הם 20,12,10 ס"מ עם שגיאת מדידה של 0.05 ס"מ בכל מדידה.
מצא בקרוב את השגיאה הגדולה ביותר בשטח הפנים של הגוש ואת אחוז השגיאה בשטח אשר נגרמה ע"י השגיאות במדידות הנפרדות.



איור 20.7

שטח הפנים $S=2(xy+xz+yz)\ ,\ x=10\ ,\ y=12\ ,\ z=20$

$$dS=\frac{\partial S}{\partial x}dx+\frac{\partial S}{\partial y}dy+\frac{\partial S}{\partial z}dz=$$

$$=2(y+z)dx+2(x+z)dy+2(x+y)dz$$

השגיאה המכסימלית תהיה כאשר השגיאות במדידת האברים יהיו בעלי אותו סימן, למשל חיובי.

כלומר:

$$dS=2(10+12)0.05+2(10+20)0.05+2(12+20)0.05=8.4$$

מכאן אם שטח הפנים הוא $S=2(10\cdot12+10\cdot20+12\cdot20)=1120$ (ס"מ ^{2}) אזי עלולה להיות שגיאה בשטח הפנים:

$S=1120\pm8.4$ (ס"מ ^{2})

השגיאה באחוזים: $\frac{8.4}{1120}\cdot100=0.75\%$

21.1 נגזרת שלמה.

נעזר במה שלמדנו על נגזרות חלקיות עבור נגזרות רגילות.

נתונה פונקציה $z = f(x,y)$ ונניח x ו- y הם כל אחת פונקציה של משתנה אחר, למשל t.

כלומר x=x(t) ו y=y(t) , אזי z היא למעשה פונקציה של t בלבד- משתנה בלתי תלוי אחד.

אנו מעוניינים למצוא את הנגזרת של z לפי t . דרך אחת לעשות זאת היא לבטא את z

באמצעות t בלבד ע"י שנציב x=x(t), y=y(t) בפונקציה z=f(x,y) ואז לחשב את $\frac{dz}{dt}$ בדרכים הרגילות.

אם x(t) ו- y(t) הן פונקציות סתומות לא נוכל לגזור בדרך זו וחייבים להשתמש בנגזרות חלקיות כפי שיודגם להלן.

נעזר בנוסחה של **הדיפרנציאל השלם**.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

dx, dy הם שינויים זעירים הודות לשינוי ב dt והשינוי בפונקציה הוא df.

נחלק את שני האגפים ב- dt ונקבל:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}} \quad \textbf{(21.2)}$$

$\frac{df}{dt}$ היא **הנגזרת השלמה** של f לפי t . כלומר מצאנו דרך למצא נגזרת שלמה ע"פ נגזרות חלקיות. לעתים קרובות דרך זו קלה הרבה יותר!

לדוגמה:

$$f(x,y) = arctg\frac{y}{x}$$

כאשר:

$$x = e^t - e^{-t} \qquad y = e^t + e^{-t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) \qquad \frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\cdot\frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-y}{y^2 + x^2}(e^t + e^{-t}) + \frac{x}{y^2 + x^2}(e^t - e^{-t})$$

$$\frac{df}{dt} = -\frac{(e^t + e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2} + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2}$$

נוסחה 21.1 נקראת בשם **חוק השרשרת**

באופן כללי אם נתונה פונקציה:

U = f (x,y,z,..)

כאשר כל משתנה פונקציה של t,

x = x(t) y = y(t) z = z(t) ....

אז:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}}\frac{dz}{dt} + \dots$$

דוגמה נוספת:

נתון: $z = x^2 + xe^y$

$x = \sin t \qquad y = \ln t$

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = 2x + e^y \quad ; \quad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = xe^y \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\frac{dy}{dt} = (2x + e^t)\cos t + \frac{xe^t}{t}$$

אם נחוץ הרי במקרה זו אפשר לבטא הכל כפונקציה של t,

$$\frac{dz}{dt} = (2\sin t + t)\cos t + \sin t$$

ישנו מקרה מיוחד וחשוב של **נוסחת השרשרת**. אם נתונה פונקציה $z = f(x,y)$ כאשר y היא פונקציה של x כלומר $y = g(x)$. במקרה זה z היא פונקציה של משתנה x בלבד ועי״ שנציב את $y = g(x)$ ב- z נקבל את z כפונקציה של x בלבד. ואז ניתן לחשב **הנגזרת השלמה** $\frac{dz}{dx}$. במקרה זה אפשר להיעזר בנוסחת השרשרת.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{t}}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\frac{dy}{dt}$$

אולם במקום $y = y(t)$ נציב $y = y(x)$ ונקבל,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\frac{dy}{dx} \qquad \textbf{(21.3)}$$

ניתן גם לקבל נוסחה זו ישר מנוסחת הדיפרנציאל השלם.

$$dz = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}dx + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}dy$$

נחלק ב- $\Delta x \to 0$ ונקבל את (21.3).

חשוב מאוד להבין את משמעות הסמלים הנ״ל . $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$ מחושב ע״י גזירת f(x,y) בעת ש- y נלקח כקבוע.

$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ מחושב ע״י גזירת f(x,y) כאשר x קבוע. $\frac{dy}{dx}$ היא **הנגזרת הרגילה** של y = g(x) .

$\frac{dz}{dx}$ היא התוצאה המתקבלת מגזירת הפונקציה z התלויה למעשה ב-x בלבד.

שים לב: הנגזרת הרגילה $\frac{dz}{dx}$ שונה לחלוטין מהנגזרת החלקית $\frac{\partial z}{\partial x}$ והקשר ביניהם ניתן ע"י נוסחה (21.3).

דוגמאות:

נתונה הפונקציה: $z=\frac{1}{3}\sqrt{12-x^2-4y^2}$

כאשר: $y=x^2$

דרך אחת היא להציב את y ב-z ולקבל z פונקציה של x בלבד ולגזור. אולם לפי הנוסחה 21.2 שהיא לעתים נוחה יותר נוכל לחשב $\frac{dz}{dx}$ ללא הצבה.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3\sqrt{12-x^2-4y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{3\sqrt{12-x^2-4y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{3\sqrt{12-x^2-4y^2}}-\frac{8xy}{3\sqrt{12-x^2-4y^2}}=\frac{-x(1+8y)}{3\sqrt{12-x^2-4y^2}}$$

למעשה יש לנו בנוסחה הנ"ל קשר בין **הנגזרת השלמה** $\frac{dz}{dx}$ לבין **הנגזרות החלקיות** $\frac{\partial z}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial y}$.

נוסחה זו חשובה מאוד ותתקלו בה רבות, במיוחד בקורס על תרמודינמיקה.
קשר חשוב נוסף המתקבל מהנוסחה הנ"ל במקרה הפרטי:

$$f(x,y)=0$$

נוכל לכתוב: $z=f(x,y)=0$

א"כ z היא פונקציה קבועה ולכן:

$$0=\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

ומכאן: **(21.4)**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

זה גם קשר חשוב בתרמודינמיקה.

דוגמה:

נתונה הפונקציה: $x^2+y^3-13=0$

חשב: $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{2x}{3y^2}$$

אפשר גם בדרך אחרת. נגזור 2 האגפים לפי x.

$$2x+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y^2}$$

שים לב : הנגזרת השלמה של פונקציה קבועה המתאפסת אולם הנגזרות חלקיות ,לא דווקא.

21.2 נוסחת השרשרת במספר משתנים.

נתונה פונקציה $z=f(x,y)$ כאשר x ו-y הם פונקציה של מספר משתנים לצורך פשטות

נניח $x=x(s,t)$. $y=y(s,t)$ אנו מעוניינים לחשב $\frac{\partial z}{\partial t}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial s}$.

אם נחזור לדפרנציאל השלם, נוסחה 21.1,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

נחלק ב- Δs השואף לאפס כאשר t קבוע, ונקבל

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

באופן דומה : נחלק ב- Δt השואף לאפס כאשר s קבוע ונקבל:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

קבלנו אפוא את **הנגזרות החלקיות** של z לפי t ולפי s. אלו הן ***נוסחאות השרשרת*** .
אפשר לקבל נוסחאות אלו בדרך אחרת, כלהלן:
נשתמש בקשר:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

מכיון ש- z פונקציה של s ו-t, $z=z(s,t)$ **נקבל:**

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt$$

נזהה את $\frac{\partial z}{\partial s}$ ואת $\frac{\partial z}{\partial t}$ באופן הבא; נחשב dy ו- dx מתוך:

$$x=x(s,t)\qquad\qquad y=y(s,t)$$
$$dx=\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt$$
$$dy=\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt$$

נציב **בדיפרנציאל השלם:**

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt$$

אם נשווה נוסחה זו לנוסחה (21.1):

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt$$

נוכל לזהות:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

ו-
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

דוגמאות:

נתון: $z=4x^2-9y^2$

$$x=\frac{s}{t}\qquad y=s^2+t^2$$

חשב: $\frac{\partial z}{\partial t}\quad ;\quad \frac{\partial z}{\partial s}$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=$$

$$8x\frac{1}{t}+(-18y)\cdot 2s=\frac{8x}{t}-36ys=\frac{8s}{t^2}-36(s^2+t^2)s$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=$$

$$8x\left(-\frac{s}{t^2}\right)+\left(-18y\right)2t=-\frac{8xs}{t^2}-36yt=-8\frac{s^2}{t^3}-36\left(s^2+t^2\right)t$$

נראה עתה איך אפשר לבצע חשובי נגזרות כאלו בדרך השניה.

לדוגמה:

נתון:

$$y=s-t\qquad x=\cos(s+t)\qquad z=x\cdot y$$

חשב: $\frac{\partial z}{\partial t}\quad ;\quad \frac{\partial z}{\partial s}$

ניקח דיפרנציאל שלם של כל משואה:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=ydx+xdy$$

$$dx=\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt=\cos(s+t)ds+\cos(s+t)dt$$

$$dy=\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{s}}ds+\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}}dt=ds-dt$$

נציב dx ו- dy ב- dz ונקבל:

$$dz=y\cos(s+t)(ds+dt)+x(ds-dt)$$
$$=\left(y\cos(s+t)+x\right)ds+\left(y\cos(s+t)-x\right)dt$$

ע״י השוואה לדיפרנציאל השלם (21.1):

$$dz=\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{s}}ds+\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{t}}dt$$

נקבל:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{s}}=y\cos(s+t)+x$$
$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{t}}=y\cos(s+t)-x$$

דוגמה נוספת:

נתון:

$$U=x^2+2xy-y\ln z$$

$$z=2t \qquad \mathrm{y}=\mathrm{s}-\mathrm{t}^2 \qquad \mathrm{x}=\mathrm{s}+\mathrm{t}^2$$

נחשב את כל הדיפרנציאלים:

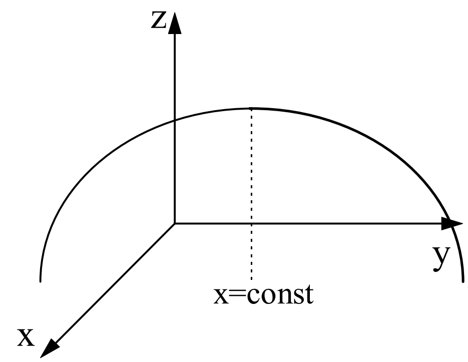
$$dU=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}dx+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}dy+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}dz$$
$$=(2x+2y)dx+(2x-\ln z)dy-\frac{y}{z}dz$$
$$dx=\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{s}}ds+\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}}dt=ds+2tdt$$
$$dy=\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{s}}ds+\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}}dt=ds-2tdt$$
$$dz=\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{s}}ds+\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{t}}dt=2dt$$

נציב ב- dU

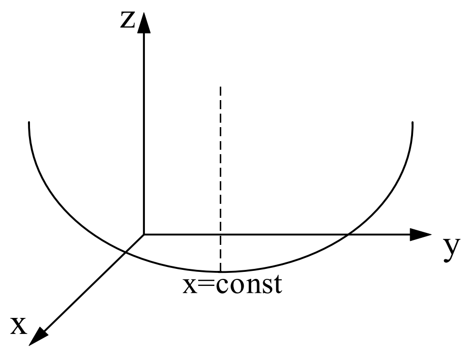
$$dU=(2x+2y)(ds+2tdt)+(2x-\ln z)(ds-2tdt)-\frac{y}{z}2dt$$
$$=(4x+2y-\ln z)ds+\left[8yt-(2x-\ln z)2t-2y/t\right]dt$$
$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{s}}=4x+2y-\ln z$$
$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}=\left[4yt+2t\left(\ln z-\frac{2y}{z}\right)-\frac{2y}{t}\right]$$

22. נקודות קיצוניות של פונקציה בעלת שני משתנים.

כפי שראינו הפונקציה $z = f(x, y)$ מתארת משטח במרחב התלת ממדי. נניח שלפונקציה יש איזה מינימום או מכסימום מקומי.



איור 22.1



איור 22.2

נניח שיש מינימום או מכסימום בנקודה (x_0, y_0). אזי בשני המקרים יתקיים:

$$\left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right|_{x_0 y_0} = \left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right|_{x_0 y_0} = 0$$

כי לאורך כל קו על המשטח מקביל למישור xy או xz ועובר דרך (x_0, y_0) יש נקודה קיצונית.

כמו כן למינימום קיים $\left.\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}\right|_{x_0 y_0}$ וכן $\left.\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}\right|_{x_0 y_0}$ חיובים.

ועבור מקסימום $\left.\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}\right|_{x_0 y_0}$; $\left.\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}\right|_{x_0 y_0}$ שליליים.

תוצאות אלו נובעות ממה שלמדנו עבור פונקציות בעלות משתנה אחד.
זאת מכיון שכאשר שומרים על משתנה אחד קבוע (x או y) הפונקציה z הופכת להיות פונקציה של משתנה אחד בלבד!
אלו תנאים הכרחיים ולא מספיקים. כלומר אם קיימת נקודה מינימום או מקסימום יתקיימו המקרים הנ״ל. זוהי איפוא דרך למצוא נקודות קיצוניות אפשריות.
כדי לאשר שאמנם אלו נקודות קיצוניות (מכסימום או מינימום) צריך להוסיף תנאי

מספיק:
$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial\, \mathrm{x}^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2} < 0} \quad \textbf{(22.1)}$$

דוגמה:

נתונה פונקציה:
$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

מצא נקודות קיצוניות.
$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = 2x - y + 3 \qquad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = -x + 2y - 2$$

הפתרון:
$$x = -\frac{4}{3} \qquad \mathrm{y} = \frac{1}{3}$$

בנקודה זו תתכן נקודה קיצונית.

נבדוק האם היא מכסימום או מינימום:
$$\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}^2} = 2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$$

ולכן יתכן שנקודה זו היא מינימום:
נבדוק את התנאי המספיק:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y)} \right)^2 = (-1)^2$$

$$(-1)^2 - 2 \cdot 2 < 0$$

התנאי המספיק מתקיים ולכן הנקודה $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ הינה נקודת **מינימום.**

נקודת אוכף: יש גם מקרה מעניין נוסף שקורה לעתים והוא נקרא נקודת אוכף, ראה איור.

בנקודת אוכף יש מינימום לאורך ציר אחד ומכסימום לאורך ציר אחר

באיור רואים מכסימום לאורך ציר x ומינימום לאורך ציר y.

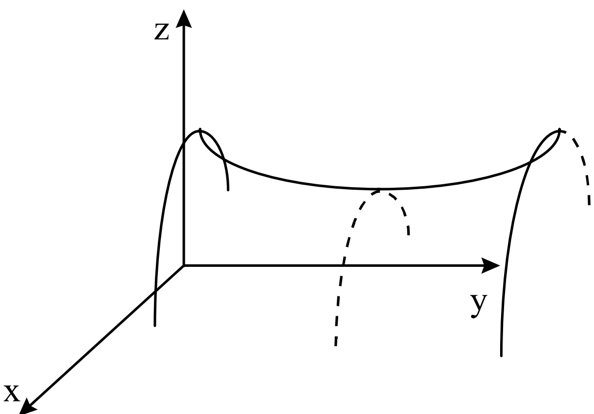
בנקודת אוכף יתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ותנאי נוסף שחייב להתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ שונה מסימנו מ- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. באיור הנ"ל

מכסימום לאורך ציר x, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$,

ומינימום לאורך ציר y, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$.



איור 22.3

שים לב: עבור נקודת אוכף אי השוויון (22.1) לא יכול להתקיים.

דוגמה: מצא מכסימום ומינימום ונקודת אוכף של הפונקציה: $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

על מנת לבדוק אם יש נקודות קיצוניות, צריך לפתור את צמד המשוואות:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$

הפתרון: $x = 0$, $y = 0$. בנקודה זו ישנה אפשרות לנקודה קיצונית. נבדוק את התנאי (22.1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - (2)(-2) = 4 > 0$$

לכן $(0,0)$ אינה נקודת מינימום או מקסימום , אלא **נקודת אוכף**. בד"כ אין צורך לבדוק את התנאי המספיק . זה נובע מכן שהנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ שונה בסימן מ- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

משתמשים בו רק במקרה הכרחי , בדרך כלל אפשר לומר מהבעיה עצמה אם יש מקסימום או מינימום או אף אחד מהם.

<u>דוגמה שימושית:</u>

מעונינים לבנות פנים של מנסרה משולשת (משולש שווה שוקיים) בעלת נפח V (ללא בסיס) ומעונינים להשתמש במינימום חומר (ראה איור).

חשב את מידותיה היחסיות של המנסרה?

גובה המשולש: $h=\frac{a}{2}tg\theta$

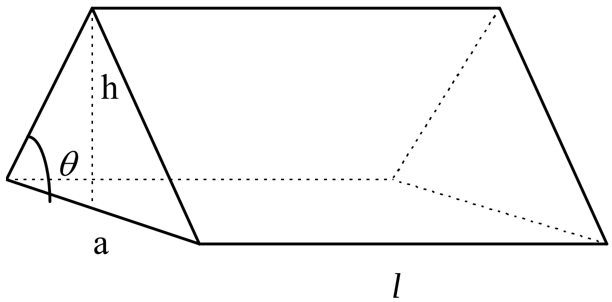
שוק המשולש: $\frac{a}{2\cos\theta}$

נפח המנסרה:

$$V=\frac{a\cdot l}{2}\cdot\frac{a}{2}tg\theta=\frac{a^2 l}{4}tg\theta$$

שטח הפנים (ללא הבסיס):

$$A=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}tg\theta+\frac{a}{2\cos\theta}\cdot 2l$$



איור 22.4

למשוואה זו יש שלשה משתנים a,θ, ו- l. אלא שהם תלויים באמצעות המשוואה של הנפח שנתון שהוא קבוע. מהמשוואה של הנפח נחלץ את l,

$$l=\frac{4\cdot V}{\mathrm{a}^2 tg\theta}$$

ונציב ב-A:

$$A=\frac{a^2}{2}tg\theta+\frac{a}{\cos\theta}\frac{4\cdot V}{a^2 tg\theta}=\frac{a^2}{2}tg\theta+\frac{4\cdot V}{a\sin\theta}$$

קיבלנו את A כפונקציה של שני משתנים בלתי תלויים a ו θ. על מנת למצוא מינימום ל- A נשוה את $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\theta}$ ו- $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{a}}$ לאפס.

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\theta}=\frac{a^2}{2}\sec^2\theta-\frac{4\cdot V}{a}\csc\theta\cot\theta=0$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{a}}=atg\theta-\frac{4\cdot V}{a^2\sin\theta}=0$$

מהמשוואה הראשונה:

$$a^3=\frac{8\cdot V\csc\theta\cot\theta}{\sec^2\theta}$$

מהמשוואה השניה:

$$a^3=\frac{4\cdot V}{\sin\theta\ \mathrm{tg}\theta}=\frac{4\cdot V\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

מכאן:

$$\frac{4\cdot \mathrm{V}\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{8\cdot V\csc\theta\cot\theta}{\sec^2\theta}$$

לאחר חילוק ב- 4V נקבל:

$$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2\cos^2\theta\cot\theta}{\sin^2\theta}$$

$\cos\theta=0$ אינה פתרון כי המקרה $\theta=90^0$ אינו מנסרה (פתרון שיתן מכסימום)

הפתרון שנשאר: $\theta=45^0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta=\frac{1}{2}$

כלומר:

$$V=\frac{1}{4}a^2 l tg\theta=\frac{1}{4}a^2 l$$

קיים גם קשר בין a ו- l

$$a^3=\frac{4\cdot V}{\sin\theta\ \mathrm{tg}\theta}=\frac{4\cdot V\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 1}=4\sqrt{2}\cdot V=\sqrt{2}\cdot a^2 l$$

$$a=\sqrt{2}\cdot l$$

עבור גדלים אלו מתקבל שטח פנים מינימלי.

הערה: על מנת לחשב מינימום שטח המעטפת ניקח: $A=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}tg\theta+\frac{a}{2\cos\theta}\cdot 2l+l\cdot a$

ונמשיך באותה דרך!