23. טורי חזקות בשני משתנים

ראינו כבר שבדרך כלל ניתן לפתח פונקציה לטור טיילור סביב x_0 בצורה הבאה:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

נניח שניתן לפתח באופן דומה פונקציה של שני משתנים $z=f(x,y)$ סביב (x_0,y_0) בחזקות של $(x-x_0)$ ו- $(y-y_0)$ ונחשב מהם המקדמים.
כלומר מניחים את הפתוח הבא:

$$\begin{aligned}f(x,y)=a_{00}&+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(y-y_0)+a_{20}(x-x_0)^2+\\&+a_{11}(x-x_0)(y-y_0)+a_{02}(y-y_0)^2+\\&+a_{30}(x-x_0)^3+a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0)+\\&+a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2+a_{03}(y-y_0)^3+\ldots\end{aligned}$$

שים לב: האינדקס הראשון מציין את החזקה של $x-x_0$ ואינדקס השני את החזקה של $y-y_0$.

נחשב את הנגזרות הבאות ועל פיהם נזהה את המקדמים: $f(x_0,y_0)=a_{00}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0y_0}=a_{10}\qquad\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0y_0}=a_{01}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0y_0}=2a_{20}\qquad\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x_0y_0}=a_{11}$$

מכאן מקבלים:

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\frac{1}{2!}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\\&+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big]+\ldots\end{aligned}\qquad(23.1)$$

כאשר $f_x\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x},\ f_{xy}\equiv\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ וכו'. נוסחה (23.1) משמשת לפתוח פונקציות של שני משתנים לטור חזקות. אם נקח את הפתוח עד לסדר ראשון ב- $x-x_0$ ו- $y-y_0$ נוכל לזהות את נוסחת הדיפרנציאל השלם. נזהה את $dz=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ ואת $dx=x-x_0$ $dy=y-y_0$ ואמנם נקבל את נוסחת הדיפרנציאל השלם

$$dz=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0y_0}dx+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0y_0}dy\,.$$

נוסחה (23.1) משמשת לקבלת קרוב יותר מנוסחת הדיפרנציאל השלם.
סימון פשוט וקל יותר לזכרון מתקבל אם נציב $x-x_0=h\,,\ y-y_0=k$.
בכתיבה זו האבר מסדר ראשון יהיה:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

והאבר מסדר שני נכתב באופן הבא:

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}+k\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)^2 f(x_0,y_0)$$

כאשר הרבוע הוא פעולה אופרטורית. באופן כללי נוכל לכתוב:

$$\boxed{(23.2)\ f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}+k\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)^n f(x_0,y_0)}$$

דוגמאות:

1) פתח את הפונקציה $f(x,y)=\sin x\cos y$ לטור חזקות בן שני משתנים סביב $x_0=y_0=0$.

$$f(0,0)=0$$

$$f_x=\cos x\cos y \quad ; \quad f_x(0,0)=1$$
$$f_y=-\sin x\sin y \quad ; \quad f_y(0,0)=0$$
$$f_{xx}=-\sin x\cos y \quad ; \quad f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{yy}=-\sin x\cos y \quad ; \quad f_{yy}(0,0)=0$$
$$f_{xy}=-\cos x\sin y \quad ; \quad f_{xy}(0,0)=0$$
$$f_{xxx}=-\cos x\cos y \quad ; \quad f_{xxx}(0,0)=-1$$
$$f_{xxy}=\sin x\sin y \quad ; \quad f_{xxy}(0,0)=0$$
$$f_{xyy}=-\cos x\cos y \quad ; \quad f_{xyy}(0,0)=-1$$
$$f_{yyy}=\sin x\sin y \quad ; \quad f_{yyy}(0,0)=0$$

$$\sin x\sin y=0+1\cdot x+0\cdot y+\frac{1}{2!}(0\cdot x^2+0\cdot 2xy+0\cdot y^2)+$$
$$+\frac{1}{3!}(-1\cdot x^3+0\cdot 3x^2y+(-1)\cdot 3xy^2+0\cdot y^3)+\ldots$$
$$=\mathrm{x}-\frac{\mathrm{x}^3}{3!}-\frac{1}{2}xy^2+\text{(אברים בסדרים גדולים מ- 3)}$$

ניתן להוכיח שפתוח בטור סביב נקודה מסוימת הוא יחיד. לכן ניתן בשיטות שונות להגיע לאותו תוצאה.

למשל: אפשר להגיע לתוצאה הקודמת (אף יותר בקלות) ע"י הכפלת הפתוחים של $\sin x$ ו- $\cos y$ כל אחד בנפרד.

$$\sin x\cos x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(1-\frac{y^2}{2!}+\ldots\right)=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{xy^2}{2!}+\ldots$$

שים לב את האבר $\frac{x^2y^3}{2!\cdot 3!}$ אסור לנו לקחת כי הוא מסדר חמישי. ואם רוצים לקחת אברים מסדר חמישי חיובים להיות עקביים ולקחת את כל האברים גם $\frac{x\cdot y^4}{4!}$ וגם $\frac{x^5}{5!}$ שכן כולם מאותו סדר גודל!

2) פתח את הפונקציה $f(x,y)=e^{x+y}$ לטור מקלורן סביב (0,0).

$$f(0,0)=e^{0}=1$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\right)\Big|_{\mathrm{x}=0\,,\,\mathrm{y}=0}=e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\Big|_{0,0}=1$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\right)\Big|_{\mathrm{x}=0\,,\,\mathrm{y}=0}=e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\Big|_{0,0}=1$$

$$\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}+y\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)^{2}e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\Big|_{0,0}=$$

$$=\frac{1}{2!}\left(x^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial \mathrm{x}^{2}}e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\Big|_{0,0}+2xy\frac{\partial^{2}}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}}e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\Big|_{0,0}+y^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial \mathrm{y}^{2}}e^{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\Big|_{0,0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2!}(x^{2}+2xy+y^{2})$$

ולכן ס"ה נקבל:

$$f(x,y)=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^{2}+\frac{1}{3!}(x+y)^{3}+\ldots$$

אם היינו לוקחים הפתוח של e^{x} ושל e^{y} כל אחד בנפרד ומכפילים היינו מקבלים אותה תוצאה:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

$$e^{y}=1+y+\frac{y^{2}}{2!}+\frac{y^{3}}{3!}+\ldots$$

$$e^{x}\cdot e^{y}=1+(x+y)+\frac{y^{2}}{2!}+\frac{x^{2}}{2!}+xy+\ldots$$

ישנם גם פונקציות שאין ברירה רק לפתח לטור של 2 משתנים לפי נוסחה (15.1).

לדוגמה:

פתח: $x^{2}y+3y-2$ בחזקות של $x-1$ ו- $y+2$

$$f(x,y)=x^{2}y+3y-2$$

$$f(1,-2)=-10$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}=2xy\Big|_{1,-2}=-4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3\Big|_{1\,,\,-2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\Big|_{1,\,-2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\Big|_{1,-2} = 2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

כל הנגזרות הגבוהות יותר מתאפסות .

נציב עתה בפתוח טור טיילור.

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0) + \\ & + \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0) + \\ & + \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(x_0,y_0) = \\ = {} & -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2) \end{aligned}$$

וזאת ניתן להוכיח בקלות בדרך אלגברית, ע"י שנפתח את הסוגריים נקבל חזרה את הביטוי $x^2y + 3y - 2$.

היתרון בכתיבה המסובכת הוא שבסביבת $y = -2, x = 1$

ניתן לקרב את הפונקציה למישור $F(x,y) = -10 - 4(x-1) + 4(y+2)$