24. החלפת משתנים.

אחד השימושים החשובים של **נגזרות חלקיות** הוא בהחלפת משתנים. לעבור ממשתנים מסוג אחד לסוג אחר. **למשל**: **מקרטזיים** x y **לפולריים.** החלפת משתנים עשויה לעתים להביא לביטויים פשוטים יותר.
נמחיש זאת בדוגמה הבאה!
נתונה המשוואה:

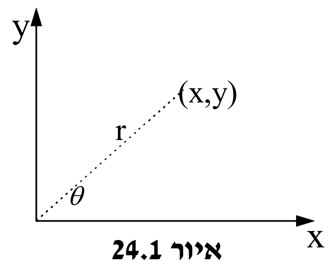
$$x\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}+y\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}=x^2+y^2$$

נעבור ממשתנים x ו-y למשתנים r ו- θ
הקשרים אליהם באופן הבא:

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

זה המעבר מקאורדינטות קרטזיות למקאורדינטות פולריות.



איור 24.1

הקשר ההפוך:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

את x ו- y אפשר בקלות להעביר לפונקציה של θ ו- r, אבל אנו מעוניינים גם את הנגזרות החלקיות של F וזו הבעיה.
F היא פונקציה של x ו- y, **כלומר:**

$$dF=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}dx+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}dy$$

אבל גם $F(r,\theta)$ לאחר החלפת משתנים ולכן

$$dF=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{r}}dr+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}d\theta$$

נבטא את dr ו- $d\theta$ באמצעות dx ו- dy וכך נוכל לזהות את $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}$ וכן $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}$.

$$dr=\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}dx+\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{y}}dy$$

$$d\theta=\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{x}}dx+\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{y}}dy$$

$$dr=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2xdx+\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2ydy=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy$$

$$d\theta=\frac{\left(-\frac{y}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}dx+\frac{\frac{1}{x}dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-ydx+xdy}{r^2}$$

ולכן:

$$dF=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{r}}\left(\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy\right)+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}\left(\frac{xdy-ydx}{r^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}\right)dx+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{r}}\frac{y}{r}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}\right)dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}$$

ולכן נוכל להציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}\right)+y\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}\right)=x^2+y^2$$

$$\left(\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r}\right)\frac{\partial F}{\partial r}+\underbrace{\left(\frac{xy}{r^2}-\frac{xy}{r^2}\right)}_{=0}\frac{\partial F}{\partial \theta}=x^2+y^2$$

$$\frac{r^2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}=r^2$$

המשוואה המקורית בקואורדינטות פולריות תהיה:

$$\frac{\partial F}{\partial r}=r$$

הערה: דרך אגב נוכל לפתור משוואה זו, הפתרון יהיה:

$$F=\frac{1}{2}r^2+f(\theta)$$

או בקואורדינטות קרטזיות:

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+f(\frac{y}{x})$$

ניתן להציב במשוואה המקורית ולהראות שפונקציה זו היא פתרון.

הערה חשובה:

אם לא היינו יכולים לחלץ $\theta\ (x,y)$, $r(x,y)$ ובכל זאת היינו מעוניינים ב $\frac{\partial r}{\partial x}$ $\frac{\partial r}{\partial y}$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ היינו יכולים לפתור זאת בעזרת הקשרים. $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$

נגזור 2 המשוואות חלקית לפי x :

$$1=\frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$0=\frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

2 משוואות ו- 2 נעלמים נכפיל הראשונה ב- $\sin\theta$ והשניה ב- $\cos\theta$ ונחסר:

$$r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r}=-\frac{y^2}{r^2}$$ וכן נחלץ $$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta=\frac{x}{r}$$

ובאותו אופן נקבל $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ ע"י גזירה 2 משוואות לפי y .