27. אנטגרלים משולשים.

המקרה של אנטגרלים משולשים דומה לאנטגרלים כפולים. אנטרל משולש נכתב

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(x,y,z)dxdydz$$ ומשמעותו: $$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\left[\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(x,y,z)dx\right)dy\right]dz$$

כלומר, מבצעים קודם האנטגרל על x כאשר y ו- z קבועים ומקבלים פונקציה שאינה תלויה ב- x.

אחר כך מבצעים אנטגרל על y כאשר z קבוע ומקבלים פונקציה שאינה תלויה ב- x וב- y.

לבסוף מבצעים אנטגרל על z. כמובן שהסדר גם יכול להשתנות.

דוגמה:

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyzdzdydx = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{2-x} xyzdz\right\}dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{xy(2-x)^2}{2}dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2(2-x)^2}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1\left(x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} - \frac{6}{5} + \frac{13}{4} - \frac{12}{3} + \frac{4}{2}\right) = \frac{13}{240}$$

27.1 משמעות האנטגרל המשולש:

$dxdydz$ הוא אלמנט נפח במרחב התלת ממדי. אלמנט הנפח הזה מוכפל $\iiint_R f(x,y,z)dxdydz$

בפונקציה $f(x,y,z)$ והאנטגרל מבצע סכום המכפלות על פני כל אלמנט הנפח בחלק המרחב R.

אם $f(x,y,z)=1$ מחשבים: $\iiint_R dxdydz$

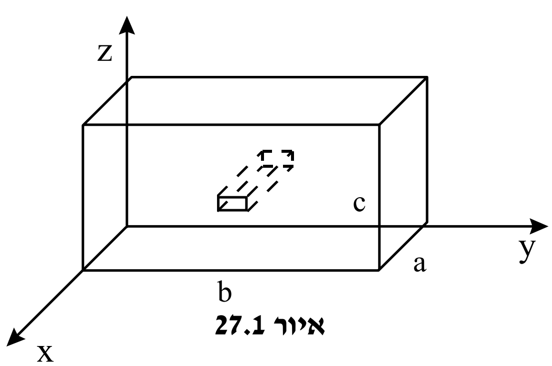
ומשמעותו: הנפח ע"י החסום R.

דוגמה: אם R הוא תיבה (a,b,c) אזי:

שים לב: אפשר לבצע נפח זה ע"י אנטגרל דו ממדי:

נפח התיבת יהיה:

$$V = \int_0^b\int_0^a\int_0^c dxdydz = a\cdot b\cdot c$$



איור 27.1

דוגמה: חשב את האנטגדל

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz$$

כאשר R נפח התיבה הנ"ל והפונקציה $f(x,y,z)$ היא

$$f(x,y,z)=x^2-2xy+z^2$$

נכתוב:

$$\int_0^c\int_0^b\int_0^a\left(x^2-2xy+z^2\right)dxdydz=\int_0^c\int_0^b\left(\frac{a^3}{3}-\frac{2a^2y}{2}+z^2a\right)dydz=$$

$$\int_0^c\left(\frac{a^3b}{3}-\frac{a^2b^2}{2}+z^2ab\right)dz=\frac{a^3bc}{3}-\frac{a^2b^2c}{2}+\frac{c^3ab}{3}$$

כמובן שבמקרה זה שנוי הסדר באנטגרל לא היה משנה את התוצאה.

משמעות אנטרל זה יכול להיות מסה של התיבה כאשר הצפיפות ניתנת ע"י $f(x,y,z)$.

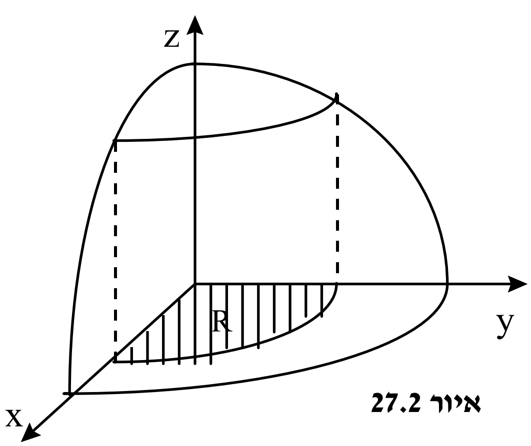
דוגמה:

איך היינו מבצעים באנטגרל משולש את הדוגמה שעשינו קודם?

יש למצא את הנפח הנחתך מהכדור: $x^2+y^2+z^2=4a^2$

ע"י הגליל $x^2+y^2=a^2$

$$\iiint_R dzdydx=\int_0^a\int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}}\int_{-(4a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}^{\left(4a^2-x^2-y^2\right)^{1/2}}dzdydx=\int_0^a\int_0^{\left(a^2-x^2\right)}\left(4a^2-x^2-y^2\right)^{1/2}dydx$$



איור 27.2

כלומר יש לנו כאן שלב מוקדם יותר מהאנטגרל שבצענו קודם. את המשך חשוב האנטגרל מבצעים כמו קודם.

היתרון בשיטה זו הוא שבאנטגרלים משולשים ניתן לבצע גם אנטגרלים שאי אפשר לבצע בדו ממדיים.

במיוחד אנטגרלים תלת ממדיים המוכפלים בפונקציה f (x,y,z).

דוגמה: חשב את האנטגרל:

$$\iiint_R\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

כאשר **R** הוא הנפח התלת ממדי החסום ע"י ארבעת המישורים:

$$z=0, y=0, x=0 \qquad x+y+z=a>0$$

נתאר את הנפח הנ"ל בצורה גאומטרית כדי להבין את הגבולות (ראה איור 27.3).

נכתוב את האנטגרל:

$$\iiint_R \left(x^2+y^2+z^2\right)dzdydx$$

z משתנה מ- 0 עד ל- $z = a - x - y$ שזה המישור החותך את הצירים.

מבצעים אנטגרציה על z ומקבלים את אלמנט

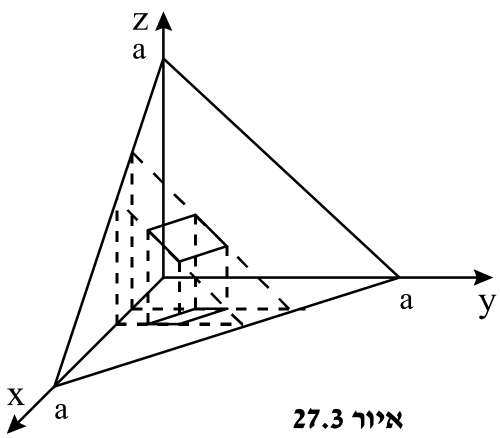
הנפח שבאיור. אח"כ מבצעים אנטגרל על y .

y - משתנה מ- 0 עד משואת הקו $y + x = a$

כלומר $y = a - x$. ואח"כ מבצעים אנטגרל

על x מ- 0 עד a ומקבלים את כל הנפח.

שים לב: שאנטגרל כזה לא ניתן לבצע בעזרת אנטרל דו ממדי.



איור 27.3

$$\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y}\left(x^2+y^2+z^2\right)dzdxdy =$$

$$=\int_0^a\int_0^{a-x}\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)_0^{a-x-y}dxdy =$$

$$=\int_0^a\int_0^{a-x} x^2(a-x-y)+y^2(a-x-y)+\frac{(a-x-y)^3}{3}\,dydx =$$

$$=\int_0^a\int_0^{a-x}\left[x^2(a-x)-x^2y+y^2(a-x)-y^3+\frac{(a-x-y)^3}{3}\right]dydx =$$

$$=\int_0^a\left(x^2(a-x)y-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^3}{3}(a-x)-\frac{y^4}{4}-\frac{(a-x-y)^4}{12}\right)_0^{a-x}dx =$$

$$=\int_0^a\left(x^2(a-x)^2-\frac{x^2(a-x)^2}{2}+\frac{(a-x)^4}{3}-\frac{(a-x)^4}{4}+\frac{(a-x)^4}{12}\right)dx =$$

$$=\int_0^a\left(\frac{x^2(a-x)^2}{2}+\frac{(a-x)^4}{6}\right)dx = \frac{a^5}{20}$$