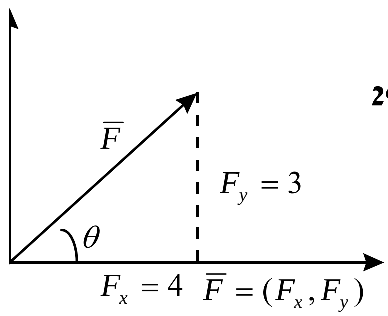
29. אנליזה וקטורית

הפרק שלפנינו נקרא אנליזה וקטורית והוא עוסק בחשבון דפרנציאלי ואנטגרלי של וקטורים.
הרבה גדלים בפיסיקה יש להם גם ערך מספרי **גודל** וגם **כיוון** במרחב. למשל העתק,
או מהירות של גוף, כח שפועל על גוף, שדה חשמלי או מגנטי בנקודה מסויימת.
גדלים אלה נקראים וקטורים. הם שונים מגדלים אחרים שאתם מכירים כמו מסה,
זמן, טמפרטורה שיש להם ערך מספרי בלבד (אין להם כיוון) והם נקראים **סקלרים**.
הטכניקה והסימונים של אנליזה וקטורית מאוד שימושיים בפיסיקה.
מקובל לסמן וקטור ע"י חץ.
כוון החץ מציין את **כוון** הוקטור ואורכו
את הערך המספרי של הוקטור.
גודל.

איור 29.1



דרך אלטרנטיבית היא לציין ע"י **רכיבים**
$\overline{F} = (F_x, F_y) \quad F_x, F_y$

גדלו של הוקטור מסומן ע"י $F = \left|\overline{F}\right|$

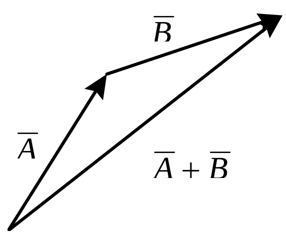
ב- $d = 2$ $\quad F = \left|\overline{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

ב- $d = 3$ $\quad F = \left|\overline{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

חיבור וקטורים

שני דרכים לחבר: **גאומטרית ואלגברית**.
א. חק המקבילית
שמים את הזנב של B בראש A
ומציירים וקטור מהזנב של A
לראש של B.
דרך ב: לחשב הרכיבים בהתאמה.

איור 29.2



$\overline{A} = (A_x, A_y)$

$\overline{B} = (B_x, B_y)$

$\overline{A} + \overline{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y)$

שני הדרכים זהות!

קיימים החוקים: חק החלוף $\quad \overline{A} + \overline{B} = \overline{B} + \overline{A}$

חק הפלוג (אסוציאטיבי) $\quad (\overline{A} + \overline{B}) + \overline{C} = \overline{A} + (\overline{B} + \overline{C})$

$\overline{A} + \overline{A} + \overline{A} = 3\overline{A}$

וקטור שלילי מוגדר כוקטור בעל אותו גודל רק בכוון הפוך. כל רכיבי הוקטור
$-\overline{A}$ הוא שלילי של $\overline{A}$ אם $\overline{A} = (A_x, A_y)$

$-\overline{A} = (-A_x, -A_y)$

ניתן לכן להגדיר הפרש בין וקטורים $\overline{A} - \overline{B}$ שמשמעותו חבור הוקטור $\overline{A}$ עם הוקטור $-\overline{B}$.

$\overline{A} - \overline{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y)$

היות שהוקטור יש לו שני רכיבים בממד $d = 2$ או שלושה רכיבים בממד $d = 3$
אזי **משוואה וקטורית** משמעותה סט של שתים או שלוש משוואות.
לכן פשוט יותר לכתוב חוקים פיסיקלים בצורה וקטורית.
למשל תנועה של גוף בעל מסה m שמופעל עליו כח $\overline{F}$ תתואר ע"י משוואת ניוטון
(החוק השני) $\quad \overline{F} = m\overline{a}$
שים לב שחק זה אינו תלוי כלל במערכת הצירים שנבחר!

<u>וקטור יחידה</u>

נסמן מערכת צירים

נתאר $\bar{i}$ וקטור יחידה בכוון x חיובי

נתאר $\bar{j}$ וקטור יחידה בכוון y חיובי

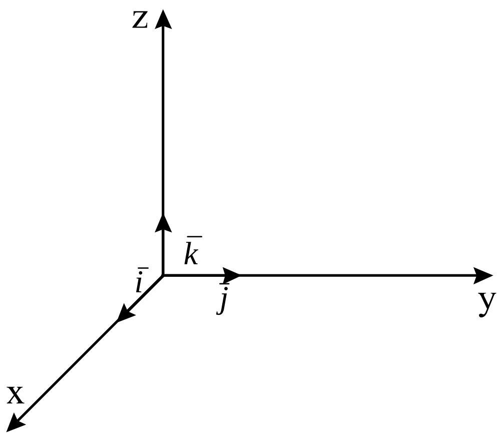
נתאר $\bar{k}$ וקטור יחידה בכוון z חיובי

הוקטורים $\bar{i}$ $\bar{j}$ $\bar{k}$ נקראים וקטורי **יחידה** או וקטורי **בסיס** עבור מערכת צירים זו.

כל וקטורים ניתן לבטא במערכת וקטורי יחידה אלו.

$$\bar{A} = \bar{i}A_x + \bar{j}A_y$$

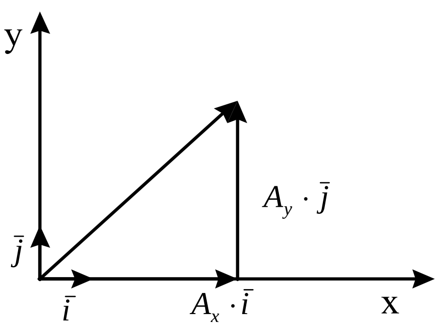
ובאופן כללי



איור 29.3

$$\bar{A} = \bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z$$

$$\bar{A} + \bar{B} = (\bar{i}A_x + \bar{j}A_y) + (\bar{i}B_x + \bar{j}B_y) =$$
$$= \bar{i}(A_x + B_x) + \bar{j}(A_y + B_y)$$



איור 29.4

<u>מכפלת וקטורים</u>

ישנם שני סוגי מכפלה של וקטורים. האחת נקראת מכפלה **סקלרית** שנותנת כתוצאה סקלר. השניה נקראת מכפלה **וקטורית** התוצאה היא וקטור.

<u>מכפלה סקלרית</u>

הגדרה: מכפלה סקלרית של $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ (כותבים $\bar{A} \cdot \bar{B}$) הוא סקלר שגדלו

מכפלת הגדלים של $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ כפול הקוסינוס של הזווית בין $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$.

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta = AB\cos\theta$$

$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$ כמובן חק החלוף קיים

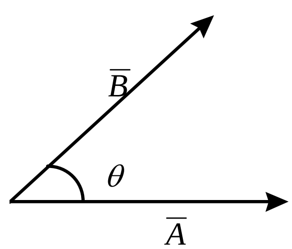
משמעות:

$\bar{A} \cdot \bar{B} = A$(הטל $\bar{B}$ על $\bar{A}$)$= B$(הטל $\bar{A}$ על $\bar{B}$)

קיים $\bar{A}^2 \equiv \bar{A} \cdot \bar{A} = A^2$

קל להראות שקיים

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C}$$



איור 29.5

נעזר עתה בכתיבה בעזרת וקטור יחידה!

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (\bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z) \cdot (\bar{i}B_x + \bar{j}B_y + \bar{k}B_z)$$

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \qquad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1 \qquad \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

<u>וקטורים מקבילים ונציבים</u>

אם $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$

אזי וקטורים נציבים!

אם שני וקטורים הם **מקבילים** אזי רכיביהם פרופורציונלים אחד לשני וקיים

$$\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$$

אם תנאי זה מתקיים הוקטורים מקבילים!

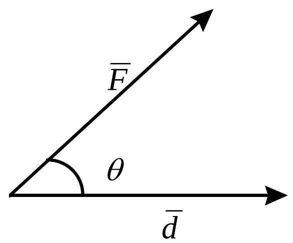
עבודה

בפיסיקה למדתם שעבודה שווה לכח כפול העתק (דרך) אם הכח וההעתק אינם מקבילים אזי הרכיב של הכח הניצב להעתק לא עושה עבודה. במקרה זה העבודה שווה לרכיב הכח מקביל להעתק מוכפל בהעתק.

כלומר $W = F\cos\theta\ d$

וזאת ניתן לכתוב כמכפלה סקלרית

$$W=\overline{F}\cdot\overline{d}$$

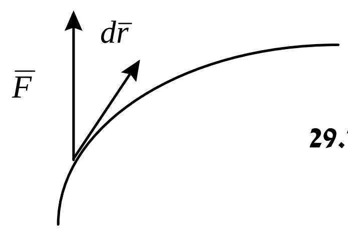


איור 29.6

אם הכח משתנה עם מרחק וכן הכוון של התנועה $\overline{d}$ משתנה עם הזמן ניתן לכתוב עבור העתק אינפינטסימלי $d\overline{r}$

$$dW=\overline{F}\cdot d\overline{r}$$

העבודה W תחושב ע"י אינטגרציה על dW שאת זה נלמד בשלב יותר מאוחר לחשב.



איור 29.7

מכפלה וקטורית

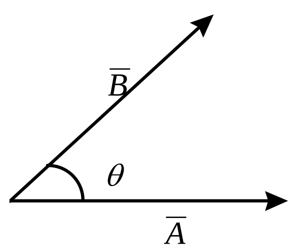
מכפלה של $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ נכתוב באופן $\overline{A}\times\overline{B}$

$\overline{A}\times\overline{B}$ הוא וקטור לפי הגדרה שגדלו וכוונו ניתן ע"י:

גודלו: $\left|\overline{A}\times\overline{B}\right| = AB\sin\theta$

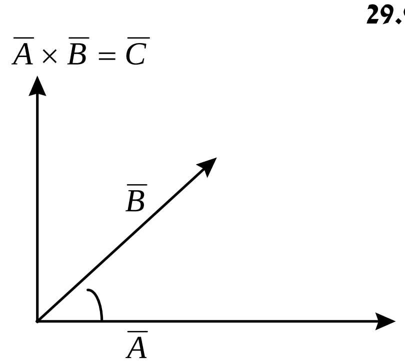
$\theta > \pi$ הזווית בין $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$.

כוון $\overline{A}\times\overline{B}$ הוא וקטור נצב למישור שיוצרים $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ ובכוון שבורג (ימני) $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ מתקדם כאשר מסובבים אותו מ- $\overline{A}$ ל- $\overline{B}$.



איור 29.8

איור 29.9



לפי חק היד הימנית בכוון הבהן!

אחת התוצאות הישירות מהגדרה זו

$$\overline{A}\times\overline{B}\neq\overline{B}\times\overline{A}$$

אלא $\overline{A}\times\overline{B}=-\overline{B}\times\overline{A}$

מכפלה וקטורית אינה קומוטטיבית!

חשוב לדעת מכפלה וקטורית של וקטורי יחידה $\overline{k}\ ,\ \overline{j}\ ,\ \overline{i}$

$$\bar{i}\times\bar{i}=|\bar{i}||\bar{i}|\sin 0=1\cdot 1\cdot 0=0 \qquad \bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=0$$

מכפלה וקטורית של כל וקטור בעצמו $\overline{A}\times\overline{A}=0$

$$\bar{i}\times\bar{j}=?$$

$$\left|\bar{i}\times\bar{j}\right|=|\bar{i}||\bar{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1\cdot 1\cdot 1=1$$

ולכן כל שני וקטורים יחידה שונים

$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$

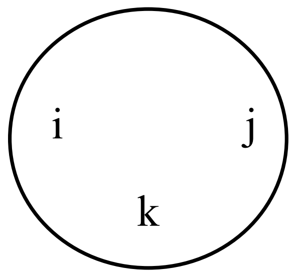
מהאיור קל לראות ש- $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$

$\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$

ולכל השלשה האחרים הם שליליים

$\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k} \qquad \bar{k}\cdot\bar{j}=-\bar{i} \qquad \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$

דרך טובה לזכור ליישום אותם על מעגל



איור 29.10

משפט חוק הפלוג:

$$\overline{A}\times(\overline{B}+\overline{C})=\overline{A}\times\overline{B}+\overline{A}\times\overline{C}$$

(ללא הוכחה)

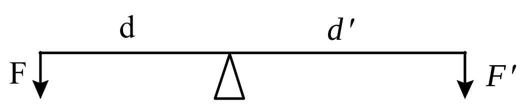
מכאן

$$\overline{A}\times\overline{B}=(\bar{i}A_x+\bar{j}A_y+\bar{k}A_z)\times(\bar{i}B_x+\bar{j}B_y+\bar{k}B_z)=$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\bar{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\bar{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\bar{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה הזו היא הדרך הקלה ביותר לזכור.



איור 29.11

<u>שמוש פיסיקלי.</u>

מומנט (תנופה) (torque)

$F'\times d'$ נקרא מומנט של F' שניהם נצבים

באופן כללי המומנט של $\overline{F}$ סביב O (ציר נצב לאיור)

מוגדר כמכפלה הכח בזרוע= $r\sin\theta$

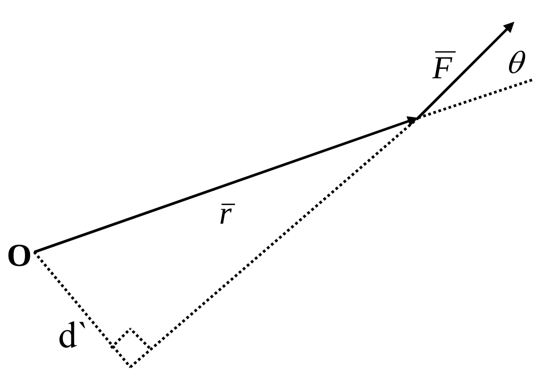
שניהם נצבים

כלומר $Fr\sin\theta$ וזה בדיוק $\bar{r}\times\overline{F}$

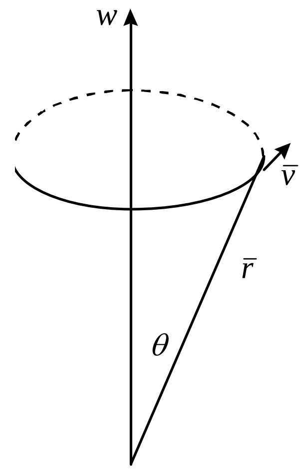
הגודל $Fr\sin\theta$

כוון נצב ללוח בכוון שלנו! לפי כלל היד הימנית

מהירות זוויתית $\bar{v}=\overline{\omega}\times\bar{r}$



איור 29.12



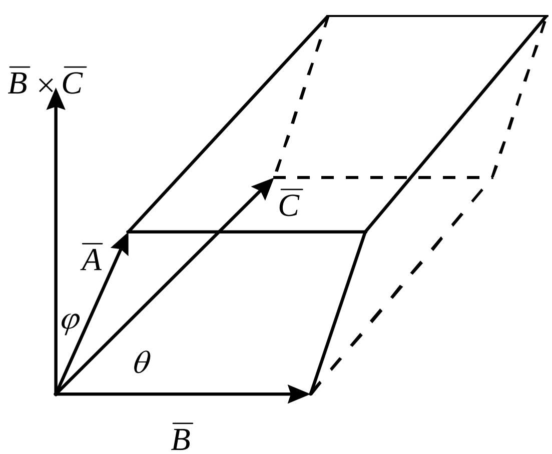
איור 29.13

<u>מקבילון</u>

$$\left|\overline{B}\times\overline{C}\right| = \left|\overline{B}\right|\left|\overline{C}\right|\sin\theta$$

$$V = |B||C|\sin\theta\cdot A\cos\varphi = \overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})$$

-



איור 29.14

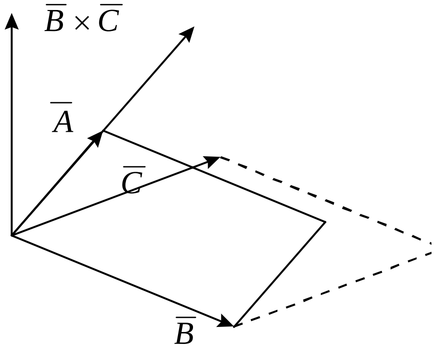
<u>מכפלה משולשת</u>

יש מכפלה משולשת <u>סקלרית</u> ויש מכפלה משולשת <u>וקטורית</u>.

מכפלה משולשת סקלרית נכתבת

$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})$

$$\overline{B}\times\overline{C}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$



איור 29.15

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})=A_x(\overline{B}\times\overline{C})_x+A_y(\overline{B}\times\overline{C})_y+$$
$$+A_z(\overline{B}\times\overline{C})_z=A_x(B_yC_z-B_zC_y)-$$
$$-A_y(B_xC_z-B_zC_x)+A_z(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

היות והחלפת שתי שורות משנה סימן בדטרמיננטה נוכל לכתוב את כל 12 מכפלות האפשריות $(2\times 3!)$:

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C})=(\overline{A}\times\overline{B})\cdot\overline{C}$$
$$=\overline{C}\cdot(\overline{A}\times\overline{B})=(\overline{C}\times\overline{A})\cdot\overline{B}=.....$$

החלפה בסדר ציקלי לא משנה!

בגלל שאין חשיבות היכן הנקודה והיכן סימן הכפל כותבים מכפלה סקלרית, משולשת: $(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=\overline{A}\cdot\overline{B}\times\overline{C}$

<u>מכפלה וקטורית משולשת</u> $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$

גודל זה (הוא וקטור) ניתן לומר מספר דברים.

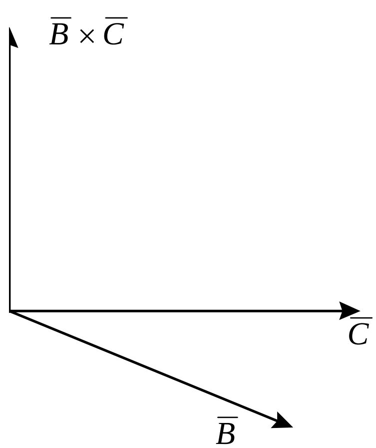
$(\overline{B}\times\overline{C})$ הוא וקטור ניצב למישור $\overline{B}$ ו- $\overline{C}$.

$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$ הוא וקטור ניצב למישור $\overline{A}$ ו- $(\overline{B}\times\overline{C})$. במיוחד נתעניין בעובדה ש- $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$ הוא נצב ל- $(\overline{B}\times\overline{C})$

כל וקטור מאונך ל- $(\overline{B}\times\overline{C})$ נמצא במישור נצב ל- $(\overline{B}\times\overline{C})$ וזהו המישור של $\overline{B}$ ו- $\overline{C}$.

לכן הוקטור $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$ הוא וקטור כלשהו במישור של $\overline{B}$ ו- $\overline{C}$.

ולכן ניתן להיכתב כקומבינציה של $a\overline{B}+b\overline{C}$ כאשר a ו-b סקלרים שאותם נרצה לחשב!



איור 29.16

משוואות וקטוריות אינם תלויות במערכת הצירים.

נבחר ציר x לאורך $\overline{B}$ וציר y במישור $\overline{B}$ ו- $\overline{C}$ אזי $(\overline{B}\times\overline{C})$ נמצא לאורך ציר Z.

ולכן במערכת צירים זו:

$$\overline{B} = B_x\overline{i}$$
$$\overline{C} = C_x\overline{i} + C_y\overline{j}$$
$$\overline{A} = A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k}$$

ולכן:

$$\overline{B}\times\overline{C} = B_x\overline{i}\times(C_x\overline{i} + C_y\overline{j}) = B_xC_y\overline{i}\times\overline{j} = B_xC_y\overline{k}$$

$$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = A_xB_xC_y\overline{i}\times\overline{k} + A_yB_xC_y\overline{j}\times\overline{k} = A_xB_xC_y(-\overline{j}) + A_yB_xC_y\overline{i}$$

אנו מעוניינים לכתוב אותם באמצעות קומבינציה של $\overline{B}$ ו- $\overline{C}$ נוריד ונוסיף $A_xB_xC_x\overline{i}$ ונקבל

$$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = -A_xB_x(C_x\overline{i} + C_y\overline{j}) + (A_yC_y + A_xC_x)B_x\overline{i}$$

אבל

$$A_xB_x = \overline{A}\cdot\overline{B}$$
$$A_yC_y + A_xC_x = \overline{A}\cdot\overline{C}$$
$$C_x\overline{i} + C_y\overline{j} = \overline{C}$$
$$B_x\overline{i} = \overline{B}$$

ולכן

$$\underline{\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = (\overline{A}\cdot\overline{C})\overline{B} - (\overline{A}\cdot\overline{B})\overline{C}}$$

דוגמה למשל מכפלה סקלרית משולשת: הראנו שמומנט סביב ציר ניתן ע"י $\overline{r}\times\overline{F}$ כאשר $\overline{r}$ ו- $\overline{F}$ היו במישור ניצב לציר הסיבוב!

שים לב: הגאומטריה האנליטית הופכת להיות פשוטה יותר בעזרת וקטורים.

29.1 נגזרות של וקטורים

נתון וקטור $\bar{A} = A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k}$ כאשר $\bar{k},\bar{j},\bar{i}$ וקטורים יחידה. ו- $A_x \quad A_y \quad A_z$ הם פונקציות של t אזי הנגזרת של $\bar{A}$ ניתנת ע"י

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA_x}{dt}\bar{i} + \frac{dA_y}{dt}\bar{j} + \frac{dA_z}{dt}\bar{k}$$

כלומר נגזרת של וקטור שווה לוקטור שרכיביו הם נגזרות של רכיבי $\bar{A}$.

דוגמה: נתון חלקיק שנע במרכב ומקומו בזמן t : (x,y,z)
וקטור המעתק של החלקיק מהראשית הוא

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

אנו אומרים ש- $\bar{r}$ הוא וקטור מקום החלקיק בזמן t.

רכיבי המהירות הם: $\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt}$. כך שמהירות

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

והתאוצה

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$$

מכפלה של סקלר בוקטור, מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית גוזרים בהתאם לחוקים הרגילים של מכפלה:
כלומר:

$$\frac{d}{dt}(a\bar{A}) = \frac{da}{dt}\bar{A} + a\frac{d\bar{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = \frac{d\bar{B}}{dt}\cdot\bar{A} + \bar{B}\cdot\frac{d\bar{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt} + \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B}$$

שים לב באחרון אסור להחליף הסדר כי

$$\bar{A}\times\bar{B} = -\bar{B}\times\bar{A}$$

דוגמה:

נדון בתנועת חלקיק במעגל במהירות קבועה.

הרדיוס קבוע $r^2 = \bar{r}\cdot\bar{r} = const$

המהירות קבועה $v^2 = \bar{v}\cdot\bar{v} = const$

נגזור 2 משואות $2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}\cdot\bar{v} = 0$ (א)

$2\bar{v}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{v}\cdot\bar{a} = 0$ (ב)

נגזור $\bar{r}\cdot\bar{v} = 0$

$$\bar{r}\cdot\bar{a} + \bar{v}\cdot\bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{r}\cdot\bar{a} = -v^2$$

מ (א) נובע $\bar{r}$ נצב ל- $\bar{v}$

מ (ב) נובע $\bar{a}$ נצב ל- $\bar{v}$

לכן $\bar{a}$ ו- $\bar{r}$ הם או מקבילים (והתנועה היא במישור) והזוית בין $\bar{a}$ ו- $\bar{r}$ היא 0 או π.

אבל $\bar{r}\cdot\bar{a}=|\bar{r}||\bar{a}|\cos\theta=-v^2$

רואים ש- $\cos\theta<0$ כלומר $\theta=\pi$!

ומכאן $|r||a|(-1)=-v^2$

או $a=\frac{v^2}{r}$

הוכחנו: עבור תנועה במעגל במהירות קבועה התאוצה היא לכוון מרכז המעגל וערכה $\frac{v^2}{r}$!

29.2 נגזרת כיוונית : גרדיאנט

נניח שנתונה פונקציה בכל נקודה במרחב. למשל טמפרטורה $T(x,y,z)$ בכל נקודה ונקודה.
נתבונן בנקודה מסוימת ונוכל לשאול מהו קצב השנוי של הטמפרטורה עם המרחק מהנקודה (במעלות לס"מ) כאשר נעים מנקודה זו. בד"כ קורה שהטמפרטורה תרד בכוונים מסוימים ותעלה בכוונים אחרים. וכן קצב הירידה או העליה יהיו שונים בכוונים שונים.

כלומר: קצב שינוי הטמפרטורה עם המרחק תלוי **בכוון** שבו ננוע. לקצב זה נקרא **נגזרת כוונית.**

בכתיבה מתמטית: רוצים למצא $\frac{\Delta T}{\Delta s}$ כאשר Δs הוא אלמנט אורך בכוון נתון.

ו- ΔT השנוי המתאים בטמפרטורה. נסמן הנגזרת הכוונית $\frac{dT}{ds}$. נלמד איך לחשב נגזרת זו.

נוכל גם לשאול עצמנו באיזה כוון $\frac{dT}{ds}$ הוא בעל הערך הגדול ביותר- המכסימלי.

זהו הכוון שממנו זורם החום (החום נע ממקום חם למקום קר- בכוון הפוך למקסימום של $\frac{dT}{ds}$)

לפני שנדון איך לחשב נגזרת כוונית, נדון בדוגמה הבאה:

נניח שאנו נמצאים בנקודה במעלה הר. אנו יכולים לשאול, באיזה כוון שפוע ההר כלפי מטה הוא הגדול ביותר?

נדייק מעט יותר! זהו הכוון אליו נחליק אם נפול.

נניח שנעים מרחק קצר Δs על ההר. השנוי בגובה Δz יכול להיות חיובי (מעלה) או שלילי (כלפי מטה) או אפס. אזי $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ או הגבול $\frac{dz}{ds}$ תלוי בכוון שאנו הולכים.

כלומר $\frac{dz}{ds}$ הוא נגזרת כוונית.

הכוון של השפוע המכסימלי הוא הכוון שבו $\frac{dz}{ds}$ יש לו ערך מוחלט גדול ביותר!

הערה: היות האנרגיה הפוטנציאלית על גרויטציה (כח המשיכה) היא $V=mgz$

אזי מכסימום $\frac{dz}{ds}$ יהיה כמו מכסימום של $\frac{dV}{ds}$ וקוים שוי פוטנציאלים יהיו

$$V(x,y) = mgz(x,y) = const$$

ננסה עתה למצא נגזרת כוונית. נתונה פונקציה $\phi(x,y,z)$ (שדה סקלרי) או בשני ממדים $\phi(x,y)$.

אנו רוצים למצא $\frac{d\phi}{ds}$ קצב השנוי של ϕ עם המרחק מנקודה (x_0,y_0,z_0) בכוון נתון.

נניח $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ יהיה וקטור יחידה בכוון הנתון. אזי משואת הישר שעובר דרך (x_0,y_0,z_0) ובכוון $\bar{u}$ ניתן ע"י פרמטר s

$$\begin{cases} x = x_0 + as \\ y = y_0 + bs \quad (29.15) \\ z = z_0 + cs \end{cases}$$

המשמעות של s הוא מרחק הנקודה (x,y,z) מ- (x_0,y_0,z_0) שכן:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{(as)^2 + (bs)^2 + (cs)^2} = s$$

מכיון ש- $\bar{u}$ וקטור יחידה קיים $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. אם נציב עתה (x,y,z) מ-(29.15) ב- $\phi(x,y,z)$

נקבל פונקציה ϕ רק של משתנה אחד s!

כלומר לאורך הקו הישר (29.15) ϕ היא פונקציה של משתנה אחד s בלבד!

נוכל א"כ לחשב בעזרת נוסחת השרשרת:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} =$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}a + \frac{\partial\phi}{\partial y}b + \frac{\partial\phi}{\partial z}c$$

וזה בדיוק מכפלה סקלרית של הוקטור $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$
עם הוקטור

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}$$

לוקטור האחרון קוראים **גרדיאנט** של ϕ ומסמנים $grad\phi$ או $\nabla\phi$.

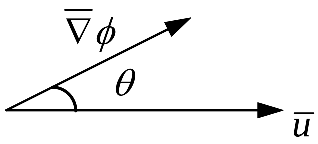
$$\bar{\nabla}\phi = grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}$$

מצאנו איפה נגזרת בכוון $\bar{u}$

$$\frac{d\phi}{ds} = \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{u} \quad (30.16)$$

נדון עתה במשמעות של הגרדיינט:

$$\frac{d\phi}{ds}=\left|\overline{\nabla}\phi\right|\cos\theta$$


איור 29.17

כאשר θ זוית בין $\overline{u}$ לבין $\overline{\nabla}\phi$.

כלומר $\frac{d\phi}{ds}$ זה ההטל של $\overline{\nabla}\phi$ בכוון $\overline{u}$.

ומכאן $\frac{d\phi}{ds}\le\left|\overline{\nabla}\phi\right|$ כלומר $\left|\overline{\nabla}\phi\right|$ הוא הנגזרת הכוונית הגדולה ביותר!

ואילו הכוון בו הנגזרת הכוונית היא גדולה ביותר הוא כוון הוקטור $\overline{\nabla}\phi$.

דוגמה: מצא את הנגזרת הכוונית של $\phi=x^2y+xz$ בנקודה (1,2,-1) בכוון $\overline{A}=2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$

נחשב את וקטור היחידה בכוון $\overline{A}$: $\overline{u}=\frac{\overline{A}}{\left|\overline{A}\right|}=\frac{1}{3}(2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})$. נחשב את הגרדיינט של ϕ:

$\overline{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\overline{k}=(2xy+z)\overline{i}+x^2\overline{j}+x\overline{k}$. נחשב הגרדיינט בנקודה (1, 2, -1)

$$\overline{\nabla}\phi_{(1,2,-1)}=3\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$$

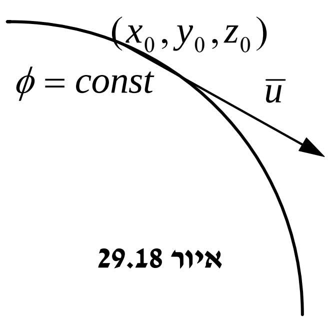
ומכאן $\frac{d\phi}{ds}=\overline{\nabla}\phi\cdot\overline{u}=(3\overline{i}+\overline{j}+\overline{k})\cdot\frac{1}{3}(2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})=2-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

הנגזרת הכוונית המכסימלית היא:

$$\left|\overline{\nabla}\phi\right|=\sqrt{3^2+1+1}=\sqrt{11}$$

וכוונה $\overline{\nabla}\phi$.

29.3 משטחים שווי פוטנציאל



איור 29.18

נניח עתה $\overline{u}$ וקטור יחידה משיק למשטח $\phi=const$ אזי:

$\frac{d\phi}{ds}$ בכוון $\overline{u}$ הוא אפס זאת מכיוון ש- ϕ

קבוע בכוון הזה. מכיוון ש- $\frac{d\phi}{ds}=\overline{\nabla}\phi\cdot\overline{u}$

נובע ש- $\overline{\nabla}\phi$ ניצב למשטח $\phi=const$ בנקודה זו!

היות ו- $\left|\overline{\nabla}\phi\right|$ הוא ערך הנגזרת הכיוונית בכוון ניצב (נורמל) למשטח $\phi=const$ הוא נקרא הרבה פעמים

הנגזרת הנורמלית ומסומן: $\left|\overline{\nabla}\phi\right|\equiv\frac{d\phi}{dn}$

<u>הוכחנו</u>: הקצב הגדול ביותר של שנוי פונקציה הוא בכוון ניצב למשטחים שווי פוטנציאל! $\phi=const$!

במקרה של טמפרטורה, המכסימום של הנגזרת הכוונית $\frac{dT}{ds}$, יהיה ניצב לאזותרמים (קוים שווי טמפרטורה). הנגזרת הכוונית המכסימלית גדלה $\left|\overline{\nabla}T\right|$ וכוונה בכיוון $\overline{\nabla}T$ הנקרא גרדיינט הטמפרטורה!

29.4 הגדרות נוספות עם אופרטור $\overline{\nabla}$:

כאשר כותבים $\overline{\nabla}\phi = \left[\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi$

ניתן לקרא לסוגריים $\overline{\nabla}$. ל- $\overline{\nabla}$ יש משמעות של אופרטור שפועל על פונקציה (כמו $\frac{d}{dx}$)

קוראים ל- $\overline{\nabla}$ המוגדר, כדלהלן:

$$\overline{\nabla} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (29.17)$$

אופרטור וקטורי!

עד כה הפעלנו את האופרטור $\overline{\nabla}$ על פונקציה סקלרית בהמשך נדון איך להפעיל $\overline{\nabla}$ על וקטורים!

נניח $\overline{V}(x,y,z)$ פונקציה וקטורית. כלומר יש לה 3 רכיבים V_x V_y V_z שהם פונקציה של x,y,z

$$\overline{V}(x,y,z) = \bar{i}V_x(x,y,z) + \bar{j}V_y(x,y,z) + \bar{k}V_z(x,y,z)$$

$\overline{V}(x,y,z)$ נקרא שדה וקטורי למשל שדה חשמלי בנקודה (x,y,z) כתוצאה ממטען חשמלי.

בכל נקודה במרחב יש וקטור $\overline{V}(x,y,z)$ שכוונו וגדלו עשוי להשתנות.

מגדירים שתי פעולות חשובות בין $\overline{\nabla}$ ל- $\overline{V}(x,y,z)$. ואחת מכפלה סקלרית $\overline{\nabla}\cdot\overline{V}$

גודל זה נקרא דיברגנט:

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{V} = div\overline{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (29.18)$$

והשני מכפלה וקטורית הנקראת curl או רוטור:

$$\overline{\nabla}\times\overline{V} = curl\overline{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \quad (29.19)$$

להגדרות אלו שמושים רבים בפיסיקה ומשמעותם נלמד בהמשך.

הגודל $\overline{\nabla}\phi$ הוא וקטור. נוכל להפעיל עליו מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית את $\overline{\nabla}$.

נגדיר $\overline{V} = \overline{\nabla}\phi$ ונחשב $\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}\phi = div\ grad\phi$.

זהו אחד האופרטורים החשובים ביותר ונקרא לפלסיאן של ϕ מסומן $\nabla^2\phi$ והוא סקלר:

$$\nabla^2\phi = \overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}\phi = div\ grad\phi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

הלפלסיאן מופיע כמעט בכל תחומי המתמטיקה השמושית. למשל:

משואת לפלס! $\nabla^2\phi = 0$

משואת הגלים! $\nabla^2\phi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$

משואת הדיפוזיה $\nabla^2\phi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$

משואות אלו מופיעות בכל תחומי המדע והטכנולוגיה, תורת החום, הדרודינמיקה, חשמל, מגנטיות, אוירודינמיקה אלסטיות, אופטיקה ועוד!