3. מושג הגבול

3.1. גבול של סידרה

מושג הגבול הוא יסודי וקשור למושגים רבים במתמטיקה כמו נגזרת, אינטגרל וכו׳.

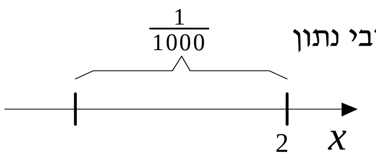
הגדרה: סידרה היא קבוצת מספרים מסודרת, לפי כלל נתון.

בפרק זה נדון במשתנה המקבל ערכים שונים בצורה מסודרת - אברי סידרה. אנו נעסוק במושג המשתנה ה״שואף לגבול״ או ״סידרה השואפת לגבול״.

לדוגמה: נתונות הנקודות העוקבות על הישר הממשי ע״י אברי הסדרה:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \ldots 2 - {}^{1}\!/_{n}$$

אנו רואים כי הנקודות מצטופפות בסביבת הנקודה 2, באופן שקיימות נקודות השייכות לסדרה אשר מרחקן מ-2 קטן מכל מספר חיובי נתון וקטן כרצוננו.



איור 3.1

למשל: הנקודה $2 - \frac{1}{1001}$ וכל הנקודות שאחריה נמצאות במרחק הקטן מ- $\frac{1}{1000}$ מהמספר 2.

הנקודה $2 - \frac{1}{1000001}$ וכל הנקודות שאחריה נמצאות במרחק הקטן מ- $\frac{1}{10^6}$ מ- 2 וכך נוכל למצוא לכל מספר קטן שנבחר איבר ש**כל** האברים אחריו נמצאים קרוב יותר מהמספר הקטן שבחרנו. מצב מסוג זה אנו מאפיינים ע״י כך שאומרים: **גבול הסדרה** הוא 2.

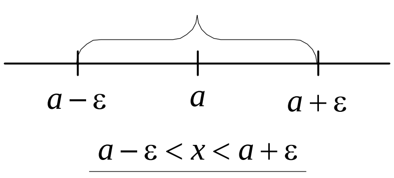
אם x הוא משתנה המקבל את ערכי הסדרה הנ״ל, נאמר כי x שואף ל-2 כגבול ונכתוב $x \to 2$ או $\lim x = 2$.

במלים אחרות: אם החל ממקום מסוים בסדרה כל האברים נמצאים במרחק קטן כרצוננו מ- a - אזי a הוא גבול הסדרה.

נביא עתה הגדרה מתמטית מדויקת לגבול של משתנה או סדרה:

3.2. הגדרה

המספר הקבוע a יקרא **גבול** של משתנה x המקבל ערכים של סידרה אם לכל ε חיובי וקטן כרצוננו נוכל למצוא ערך של המשתנה x כך שעבור כל ערכי x שבאים אחריו יתקיים אי השוויון $|x-a| < \varepsilon$. אז נכתוב $x \to a$ או $\lim x = a$.



איור 3.2

הערה: $|x-a|$ משמעותו המרחק של x מ- a, ראה איור.

דוגמה 1: נניח כי המשתנה x מקבל את הערכים הבאים:

$$x_1 = 2,\ \ x_2 = 1\tfrac{1}{2},\ \ x_3 = 1\tfrac{1}{3}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{n} + \ldots$$

נוכיח שמשתנה זה גבולו הוא 1.

צריך להוכיח שהחל מ- n מסויים קיים $|x_n - 1| < \varepsilon$ לכל ε חיובי וקטן כרצוננו.

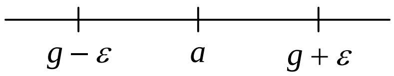
נחשב: $|x_n - 1| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}$

ואמנם, לכל ε נוכל למצוא n שיקיים את אי השוויון $\frac{1}{n} < \varepsilon$ וזהו $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (שיקיים $|x_n - 1| < \varepsilon$).

דרך **אינטואיטיבית** יותר אבל לא מדויקת להסביר את מושג הגבול היא לומר שלסדרה $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ יש גבול a אם האברים העוקבים ״הולכים ומתקרבים״ כרצוננו ל-a. שיטה זו משמשת לעתים לשם ניחוש ערך הגבול, אבל צריך להוכיח לפי ההגדרה.

3.3 משמעות גיאומטרית

נתון x עובר על ערכי סידרה, $\lim x = g$ משמעותו
שכל הנקודות מלבד מספר **סופי שלהן** מצטופפות
בכל קטע קטן כרצוננו בין $g - \varepsilon$ לבין $g + \varepsilon$,



איור 3.3

שכן $|x - g| < \varepsilon$ משמעותו $g - \varepsilon < x < g + \varepsilon$ - כלומר - מרחק x מ-g קטן מ-ε.

דוגמה 2 : נתון משתנה x המקבל את ערכי הסדרה -

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2^2} \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2^3} \quad . \; . \; . \quad x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

וכיח שגבול הסדרה הוא 1. צ"ל שהחל מ- n מסוים $|x_n - 1| < \varepsilon$ לכל ε חיובי וקטן כרצוננו.

אם נמצא את אותו n מסוים סיימנו את ההוכחה!

נחשב:

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

לכל ε נוכל למצוא n המקיים $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ - נמצא את ה-n הזה:

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad n\log 2 > \log\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$$

מצאנו את n לכל ε שנבחר. כלומר, כל ערכי x עם n כזה יקיימו - $|x_n - 1| < \varepsilon$!

שים לב כי במקרה זה ערכי המשתנה גדולים או קטנים מהגבול, והמשתנה מגיע לגבול ע"י תנודות סביב הגבול (אוסצילציות).

הגדרה: אם קיים גבול לסדרה היא נקראת **מתכנסת** אחרת היא **מתבדרת**.

דוגמה 3: נתונה הסדרה $\ldots \; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \; \ldots \;, \frac{n}{n+1}$ - המשתנה x מקבל את ערכי הסדרה. מהו גבול הסדרה? אנו רואים באופן אינטואיטיבי שסביב המספר 1 מצטופפים אינסוף מספרים, או בכל סביבה קרובה ל1- שנבחר נוכל למצוא איבר בסדרה שהחל ממנו כל האברים נמצאים בסביבה. כלומר $|x - 1| < \varepsilon$ לכל ε שנבחר.

נוכיח עתה ש1- הוא אמנם גבול הסדרה:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

ואמנם קיים n כזה כך ש- $\varepsilon > \frac{1}{n+1}$ לכל ε שנבחר. נוכל למצוא את ה-n הזה:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \Rightarrow \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{למשל:} \quad n > 99 \;\Rightarrow\; \varepsilon = \frac{1}{100}$$

כלומר: אם $\varepsilon = \frac{1}{100}$ אזי אם $n > 99$ נקבל שהם קרובים ל-1 יותר מאשר $\frac{1}{100}$. האיבר ה-100, מרחקו מ-1 הוא: $\left|\frac{100}{101} - 1\right| = \frac{1}{101}$ וכל המספרים אחריו ודאי יהיו קרובים יותר ל-1 לכן 1 יהיה גבול הסדרה.

מסקנות:

א. אם נתונה הסדרה $x = c$ (קבוע) ברור שהגבול של קבוע הוא הקבוע עצמו, שכן תמיד קיים אי השוויון $\varepsilon > 0 = |c-c| = |x-c|$ לכל ε חיובי.

ב. לא לכל משתנה המקבל ערכים של סדרה יש גבול. נסתכל למשל על המשתנה המקבל את ערכי הסדרה הבאה:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4} \quad x_3 = \frac{1}{8} \quad x_4 = 1 - \frac{1}{16} \quad . \; . \; . \quad x_{2n} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} \quad x_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

עבור n מספיק גדול, הערכים של x_{2n} וכל אלו שאחריו עם מספר סידורי זוגי יהיו קרובים ל-1 כרצוננו. ואילו הערכים של x_{2n+1} וכל אלו שאחריו עם מספר סידורי אי-זוגי יהיו קרובים ל-0 כרצוננו. ולכן לפי הגדרת הגבול, למשתנה x אין גבול שכן לא **כל** ערכי x אחרי n מסוים קרובים ל-1 או ל-0 כרצוננו.

הגדרה: אנו אומרים ש- x **שואף חיובית לאינסוף** $(x \to +\infty)$ אם החל ממקום מסוים בסדרה יהיה x גדול מכל מספר חיובי גדול שנבחר.

לדוגמה: אם x מקבל את הערכים ...1,2,3,4 אזי $x \to \infty$ או $\lim x = \infty$.

באותו אופן $x \to -\infty$ אם החל ממקום מסוים בסדרה יהיה x קטן מכל מספר שלילי נתון קטן ככל שיהיה.

לדוגמה: $x \to -\infty$ על פני הסדרה ...,2,-4,-6-

נאמר כי x **שואף לאינסוף** $x \to \infty$ אם $|x| \to \infty$ כלומר אם $x \to +\infty$ או $x \to -\infty$.