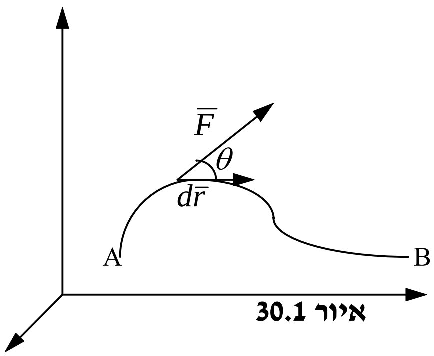
30. אנטגרלים קויים.



איור 30.1

ראינו שאלמנט עבודה הנו $dW = \overline{F}\cdot d\overline{r}$, דהיינו: מכפלה סקלרית בין העתק אינפיניטסימלי לבין הכוח (ראה איור 31.1). נניח שהמערכת נעה בין A ל-B עם כוח משתנה כאשר המקום משתנה. למשל כוח על מטען חשמלי בשדה חשמלי. הכח $\overline{F}$ משתנה מנקודה לנקודה כלומר $\overline{F}(x,y,z)$ מכיוון שאנו מעוניינים בעבודה על מסלול קוי הרי שהקואורדינאטות x,y,z אינם בלתי תלויים אלא קשורים אחד לשני ותלויים במשתנה אחד בלבד.
בשלשה ממדים צריך 2 משואות לתאר קו - כמו חתוך בין שני משטחים - לכן לאורך הקו יש רק **משתנה אחד בלתי תלוי** (כמו בנגזרת כוונית!).

נכתוב את $\overline{F}$ ו- $d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$ כפונקציה של משתנה אחד. ולכן, האנטגרל של $dW = \overline{F}\cdot d\overline{r}$ לאורך הקו מתקבל כאנטגרל רגיל של משתנה אחד וכך נוכל לחשב את סך כל העבודה שנעשתה ע"י $\overline{F}$ בתנועה מ-A ל-B.
אנטגרל כזה נקרא- **אנטגרל קוי.**
אנטגרל קוי משמעותו אנטגרל לאורך עקומה- קו- כלומר זהו אנטגרל חד ממדי בניגוד לאינטגרלים דו ממדיים שנעשים על משטח! או אינטגרלים משולשים שנעשים על נפח. חשוב להבין שיש רק משתנה בלתי תלוי **אחד** מכיון שנמצאים על הקו.
בשני ממדים משואת הקו ניתנת לכתיבה ע"י $y = f(x)$ כאשר x משתנה בלתי תלוי.
בשלשה ממדים משואת הקו (כגון ישר) כמו למשל אם הוא קו ישר:

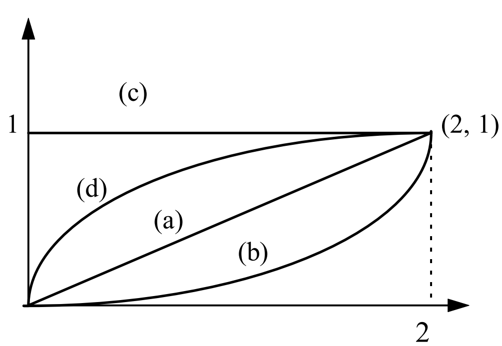
$$x = x_0 + as$$
$$y = y_0 + bs$$
$$z = z_0 + cs$$

על מנת לחשב את האנטגרל הקוי צריך לבטא זאת קודם כאנטגרל חד ממדי. נוכל להמחיש זאת בדוגמה הבאה.

דוגמה: נתון הכח $\overline{F} = xy\overline{i} - y^2\overline{j}$

מצא את העבודה הנעשית ע"י כח זה לאורך הקוים הנראים באיור 31.2 המחברים את הנקודה מ- (0,0) ל-(2,1)

(a) קו ישר
(b) פרבולה
(c) קו שבור
(d) לאורך הקו $x = 2t^3 \quad y = t^2$



איור 30.2

נחשב את העבודה $W = \int_{(0,0)}^{(2,1)} \overline{F}\cdot d\overline{r}$ לאורך המסלולים הנ"ל.

במישור x,y קיים.
$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$
כלומר: $d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy$
ולכן $\overline{F}\cdot d\overline{r} = xydx - y^2dy$

$$W = \int (xydx - y^2 dy)$$

נכתוב עתה את האנטגרל באמצעות **משתנה אחד** לאורך מסלול (a) שהוא קו ישר. כאן מתקיים $y = \frac{1}{2}x \quad dy = \frac{1}{2}dx$.

ולכן נקבל אנטגרל על משתנה x בלבד!

$$W_a = \int_0^2 \left(x\frac{1}{2}xdx - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \frac{1}{2}dx \right) = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \left.\frac{x^3}{8}\right|_0^2 = 1$$

אפשר לעשות גם האנטגרל על y : $x = 2y$ ו- $dx = 2dy$ ולעשות אינטגרל מ-0 ל-1 ונקבל אותה התוצאה.

לאורך מסלול (b): פרבולה $y = \frac{1}{4}x^2 \quad dy = \frac{1}{2}xdx$

$$W_b = \int_0^2 \left(x\frac{1}{4}x^2 dx - \frac{1}{16}x^4 \frac{1}{2}xdx \right) = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{32}x^5 \right) dx = \left| \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192} \right|_0^2 = \frac{2}{3}$$

לאורך מסלול (c) קו שבור

נעשה קודם אנטגרל מ-(0,0) ל-(0,1) ואח״כ מ-(0,1) ל-(2,1) ונחבר התוצאות.

לאורך $(0,0) \to (0,1)$ קיים $x = 0 \quad dx = 0$ ואז נצטרך y כמשתנה ונקבל

$$\int_{y=0}^{1} \left(0 \cdot y \cdot 0 - y^2 dy\right) = -\left.\frac{y^2}{3}\right|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

מ-(0,1) ל-(2,1) $y = 1 \quad dy = 0$ ולכן:

$$\int_{x=0}^{2} (x \cdot 1dx - 1 \cdot 0) = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2$$

העבודה תהיה במסלול (c):

ס״ה $W_c = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$

במסלול (d) נזדקק לטכניקה אחרת:

במקום y נציב $y = t^2$ ובמקום x נציב $x = 2t^3$, וכמו כן $dy = 2tdt \quad dx = 6t^2 dt$.

בראשית $t = 0$ וב- (2,1) $t = 1$

ואז נקבל:

$$W_d = \int_0^1 \left(2t^3 t^2 6t^2 dt - t^4 2tdt\right) = \int_0^1 \left(12t^7 - 2t^5\right) dt = \frac{12}{8} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

30.1 חוקי שמור.

יש מקרים שבהם האנטגרל בכל דרך נותן אותה תוצאה ויש שלא! בדוגמה הקודמת ראינו שבכל דרך התוצאה היא שונה.
מהי המשמעות הפיסיקלית של תופעה זו?
אם מפרשים האינטגרלים כעבודה על גוף לאורך מסלול האינטגרל, אזי יש מקרים שבהם העבודה משמרת (כאשר אין חיכוך למשל) ואז בכל מסלול מקבלים אותה תוצאה. ויש מקרים שהעבודה לא משמרת ובדרכים שונות עושים עבודה שונה.
אם העבודה תלויה בדרך אנו קוראים לכח **לא משמר.** אם העבודה אינה תלויה רק בשתי קצוות האינטגרל אזי הכח נקרא **משמר**!
למשל העבודה להעלות מסה m למעלה הר בגובה h היא $W = mgh$ כל זמן שאין חיכוך.
תוצאה זו נכונה הן בעליה בשיפוע או בעליה בכוון אנכי! נחזור עתה על הדוגמה הקודמת אלא שהכח הפעם יהיה: $\bar{F} = xy\bar{i} + \frac{1}{2}x^2\bar{j}$

(a) קו ישר $y = \frac{1}{2}x$; $dy = \frac{1}{2}dx$

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} \quad \bar{F} = xy\bar{i} + \frac{1}{2}x^2\bar{j}$$

$$W_{(a)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) =$$

$$= \int_0^2 x\frac{1}{2}xdx + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{2}dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x^2dx = \frac{3}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2$$

(b) פרבולה $y = \frac{1}{4}x^2$; $dy = \frac{1}{2}xdx$

$$W_{(b)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}x^3dx + \frac{1}{4}x^3dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2$$

(c)
$$(0,0) \to (0,1)$$
$$(0,1) \to (2,1)$$

$$W_{(c)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) = 0 + \int_0^2 (x \cdot 1dx + \frac{1}{2}\underset{\to 0}{xdy}) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{2} = 2$$

(d)
$$x = 2t^3 \qquad dx = 6t^2dt$$
$$y = t^2 \qquad dy = 2tdt$$

$$W_{(d)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) = \int_0^1 2t^3 \cdot t^2 \cdot 6t^2dt +$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{2}4 \cdot t^6 \cdot 2tdt = 12\int_0^1 t^7dt + 4\int_0^1 t^7dt = 16\frac{t^8}{8}\Big|_0^1 = 2$$

אנו רואים איפה שלפעמים הכח משמר כמו בדוגמה האחרונה ולעתים אינו משמר כמו בדוגמה הקודמת. רצוי לכן לדעת לזהות כוחות משמרים או שאינם משמרים לפני שמבצעים אינטגרציה.

כי אם הכח משמר מספיק לעשות אינטגרל על מסלול אחד כדי לדעת את התשובה!
נלמד משפט חשוב על הבחנה בין כוחות משמרים ושאינם משמרים.

<u>משפט:</u> תנאי הכרחי ומספיק ש $\int \bar{F}\cdot d\bar{r}$ יהיה בלתי תלוי במסלול הוא $curl\bar{F}=0$ או $\bar{\nabla}\times\bar{F}$.
כלומר אם קיים $\bar{\nabla}\times\bar{F}=0$ הכוח משמר ואם $\bar{\nabla}\times\bar{F}\neq 0$ הכוח אינו משמר.

נסביר עכשיו מדוע משפט זה נכון!
נניח שנתונה פונקציה רציפה $w(x,y,z)$ כזו ש $\bar{F}$ הוא גרדיינט שלה

$$\bar{F}=\nabla w=\frac{\partial w}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial w}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial w}{\partial z}\bar{k}$$

כלומר $F_x=\frac{\partial w}{\partial x}\quad F_y=\frac{\partial w}{\partial y}\quad F_z=\frac{\partial w}{\partial z}$

נעזר בתכונה $\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ וכו' ונקבל

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

ולכן

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$$

מהגדרה של $\bar{\nabla}\times\bar{F}=curl\bar{F}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

מהגדרה של $\bar{\nabla}\times\bar{F}=curl\bar{F}$ נובע שכל הרכיבים של $curl\bar{F}$ שווים לאפס כלומר:
אם $\bar{F}=\bar{\nabla}w$ אזי $\bar{\nabla}\times\bar{F}=0$. להפך גם קיים (כפי שנראה בהמשך) אם $\bar{\nabla}\times\bar{F}=0$
נוכל למצוא תמיד פונקציה $w(x,y,z)$ שעבורה $\bar{F}=\bar{\nabla}w$. ולכן אם $\bar{F}=\bar{\nabla}w$ נוכל לכתוב

$$\bar{F}\cdot d\bar{r}=\bar{\nabla}w\cdot d\bar{r}=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz=dw \quad (30.1)$$

ומכאן

$$\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_A^B dw=w(B)-w(A)$$

כאשר $w(B)$ ו- $w(A)$ הם ערכי הפונקציה w בנקודות A ו-B של מסלול האינטגרציה
והתוצאה **אינה** תלויה במסלול בו עשינו האינטגרציה. כלומר $\bar{F}$ הוא כח **משמר.**
הדיפרנציאל dw במשואה (30.1) נקרא דיפרנציאל **שלם.** נוכל לומר ש- $\bar{\nabla}\times\bar{F}=0$
הוא תנאי הכרחי ומספיק ש- $\bar{F}\cdot d\bar{r}$ הנו dw דיפרנציאל שלם.
ע"מ להסביר נראה דוגמאות
מתי $\bar{F}\cdot d\bar{r}$ דיפרנציאל שלם או לא.

<u>דוגמאות</u>

1) נדון בפונקציה:

$$w = x^2 y - xz^3 - z$$

$$dw = (2xy - z^3)dx + x^2 dy - (3xz^2 + 1)dz$$

כאן dw דיפרנציאל שלם לפי הגדרה כי קבלנו אותו מתוך דיפרנציאל של פונקציה.

נוכל לראות שאם נכתוב $dw = \overline{F} \cdot d\bar{r}$ אזי $\overline{\nabla} \times \overline{F} = curl\overline{F} = 0$.

הנגזרת החלקית לפי x של המקדם של dy שווה לנגזרת החלקית לפי y של המקדם של dx.

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3)$$

וכן

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2 - 1) = -3z^2 = \frac{\partial}{\partial z}(2xy - z^3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2 - 1) = 0 = \frac{\partial}{\partial z}(x^2)$$

קשרים אלו קיימים שכן $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ וכו'.

דבר זה ברור שכן קבלנו dw ע"י לקיחת הדיפרנציאל של w.

2) נראה עתה דוגמה נוספת בה נתון $dw = \overline{F} \cdot d\bar{r}$

נדון בדוגמה

$$dw = \overline{F} \cdot d\bar{r} = (2xy - z^3)dx + x^2 dy + (3xz^2 + 1)dz$$

זה כמעט כמו dw מהדוגמה הקודמת אלא שהסימן של המקדם של dz הוא הפוך.

עכשיו שתי משוואות האחרונות לא קיימות כלומר $\overline{\nabla} \times \overline{F} \neq 0$ ו- dw אינו דיפרנציאל מדויק.

אם נשאל האם ישנה פונקציה ש- dw הוא הדיפרנציאל שלה? התשובה היא **לא** כי אילו הייתה פונקציה כזו אזי הנגזרות השניות המתחלפות היו שוות: $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

ו- $\overline{\nabla} \times \overline{F} = curl\overline{F} = 0$.

משואה כזו מופיעה הרבה פעמים, כאשר dw לא דיפרנציאל מדויק אזי $\overline{F}$ הינו כח שאינו משמר ו- $\int_A^B \overline{F} \cdot d\bar{r}$ שהיא העבודה הנעשית בין A ו-B תלויה לא רק בנקודות A ו- B אלא גם במסלול עליו האובייקט נע. זה קורה כפי שאמרנו כאשר ישנם למשל כוחות חיכוך.

מצד שני לפעמים נתון $\overline{F}$ כזה או $dw = \overline{F} \cdot d\bar{r}$, שמקיים $\overline{\nabla} \times \overline{F} = curl\overline{F} = 0$.

אז אנו יודעים שקיימת פונקציה w ונרצה לדעת איך למצוא אותה (עד כדי קבוע אינטגרציה).

לצורך זה נוכל לחשב את האינטגרל (30.1) מנקודה התחלתית A ועד למשתנה B לאורך מסלול כוח כלשהו. מכיוון שהאינטגרל אינו תלוי במסלול התוצאה תיתן את הערך של w בנקודה B.

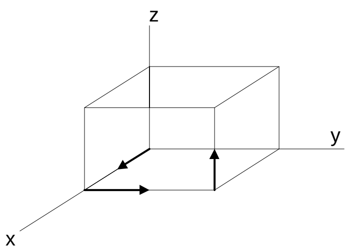
יהיה גם תוספת קבוע w שערכו תלוי בנקודה ההתחלה A.

3) נתון:

$$dw = (2xy - z^3)dx + x^2 dy - (3xz^2 + 1)dz$$

נחשב אינטגרל של dw :

מהראשית עד לנקודה (x,y,z) מכיוון שזה דיפרנציאל שלם.
כל מסלול ייתן אותה תוצאה ולכן נבחר מסלול נח. כמסלול
אינטגרציה ניקח את הקו השבור מ- $(0,0,0)$ ל- $(x,0,0)$
ומשם
ל- $(x,y,0)$ ומשם ל- (x,y,z) (ראה איור 30.3).



איור 30.3

מ- $(0,0,0)$ ל- $(x,0,0)$: קיים $y=z=0$ $dy=dz=0$
כך שהאינטגרל הוא אפס לאורך מסלול זה.
מ- $(x,0,0)$ ל- $(x,y,0)$: קיים
$x=const$ $z=0$ $dx=dz=0$
כך שהאינטגרל הוא

$$\int_0^y x^2 dy = x^2 \int_0^y dy = x^2 y$$

מ- $(x,y,0)$ ל- (x,y,z) $x=const$ $y=const$ $dx=dy=0$
והאינטגרל

$$-\int_0^z (3xz^2+1)dz = -xz^3 - z$$

ולכן ס"ה נקבל $w = x^2 y - xz^3 - z$

ואמנם

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z} = (2xy - z^3)dx + x^2 dy - (3z^2 x + 1)dt$$

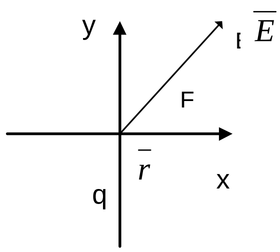
אבל $w = x^2 y - xz^3 - z + cont$ גם יהיה פתרון.

<u>**שים לב:**</u> w שקיבלנו הוא האינטגרציה של $dw = \overline{F}\cdot d\overline{r}$. כלומר אם $\overline{F}$ הוא כח אזי w היא העבודה שנעשתה ע"י הכח $\overline{F}$ במעבר מ- $(0,00)$ ל- (x,y,z).

אם הכח משמר כמו בדוגמה האחרונה אזי בכל מסלול נקבל אותו דבר.
אם הכח אינו משמר התשובה אינה פונקציה של (x,y,z) בלבד אלא גם של המסלול בו בחרנו. לכן לא ניתן לומר שקיימת פונקציה w כזו ש- $\overline{F}\cdot d\overline{r}$ זה הדיפרנציאל שלה!
או ש - $\overline{F} = \overline{\nabla} w$.

30.2 פוטנציאלים

במכניקה כאשר $\overline{F}=\overline{\nabla}w$, w הוא עבודה שנעשתה ע"י הכוח $\overline{F}$.
לדוגמה אם מסה m נופלת מגובה z תחת כח הגרוויטציה. העבודה שנעשית על ידי הכוח $\overline{F}$ של הגרביטציה היא $w=mgz$. אם לעומת זאת מרימים את המסה לגובה z נגד הגרביטציה, העבודה שנעשית ע"י כח הגרביטציה $\overline{F}$ היא $w=-mgz$ כי כוון התנועה הפוך ל- $\overline{F}$.
עלית האנרגיה הפוטנציאלית של m במקרה זה היא $\phi=+mgz$ כלומר $w=-\phi$ או $\overline{F}=-\overline{\nabla}\phi$.
הפונקציה ϕ נקראת אנרגיה פוטנציאלית או הפוטנציאל הסקלרי של הכוח $\overline{F}$.(כלומר ϕ יכול להשתנות ע"י תוספת קבוע- זה מתאים לבחירת רמת האפס של האנרגיה הפוטנציאלית ולא משפיעה על $\overline{F}$.)
באופן כללי לכל וקטור $\overline{V}$ אם $curl\overline{V}=0$ קיימת פונקציה ϕ שנקראת **הפוטנציאל הסקלרי** של $\overline{V}$ כך ש- $\overline{V}=-\overline{\nabla}\phi$.
זהו ההגדרה המקובלת של פוטנציאל סקלרי במכניקה וחשמל. (לפעמים בהידרודינמיקה מגדירים פוטנציאל מהירות $\overline{V}=-\overline{\nabla}\phi$).



איור 30.4

דוגמה:
מצא את הפוטנציאל הסקלרי של שדה חשמלי של נקודת מטען q הנמצאת בראשית הצירים (ראה איור 31.4).
נזכור שבנקודה $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ השדה החשמלי שמשמעותו הכוח ליחידת מטען ב $\overline{r}$ הודות למטען q (ביחידות אלקטרוסטטיות)
הוא: $\overline{E}=\frac{q}{r^2}\overline{e}_r=\frac{q}{r^2}\frac{\overline{r}}{r}=\frac{q}{r^3}\overline{r}$
זהו חוק קולון מחשמל.
אם ניקח את רמת האפס של האנרגיה החשמלית ב- ∞, אזי הפוטנציאל הסקלרי ϕ משמעותו הסימן ההפוך של העבודה הנעשית ע"י השדה על מטען יחידה כאשר מביאים אותו מ- ∞ ל- $\overline{r}$. וזה

$$\phi=-\int_{\infty\to\overline{r}}\overline{E}\cdot d\overline{r}=q\int_{\overline{r}\to\infty}\frac{\overline{r}\cdot d\overline{r}}{r^3}$$

כדאי לחשב אינטרגל זה בעזרת קואורדינטות פולריות (r,θ) כאשר θ קבוע ו- $\overline{r}$ ישתנה מ- ∞ ל- $\overline{r}$. זה מוצדק אם נוכיח ש- $\overline{\nabla}\times\overline{E}=0$ (תרגיל!)
כלומר $\overline{E}$ הוא כח משמר.
נחשב את $\overline{r}\cdot d\overline{r}$

$$d(\underline{r}\cdot\underline{r})=d(r^2)=2rdr$$

מצד שני

$$d(\underline{r}\cdot\underline{r})=2\underline{r}\cdot d\underline{r}$$

כלומר

$$\underline{r}\cdot d\underline{r}=rdr$$

ולכן נקבל

$$\phi=q\int_r^\infty\frac{rdr}{r^3}=q\int_r^\infty\frac{dr}{r^2}=-\frac{q}{r}\bigg|_r^\infty=\frac{q}{r}$$