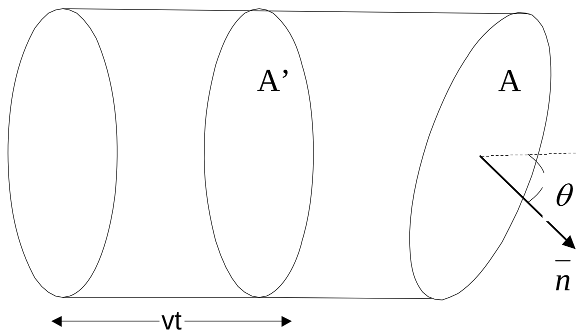
31. הדיברגנט



איור 31.1

הגדרנו דיברגנט של וקטור $\bar{V}=\bar{V}(x,y,z)$ ע״י

$$div\bar{V}=\bar{\nabla}\cdot\bar{V}=\frac{\partial Vx}{\partial x}+\frac{\partial Vy}{\partial y}+\frac{\partial Vz}{\partial z}$$

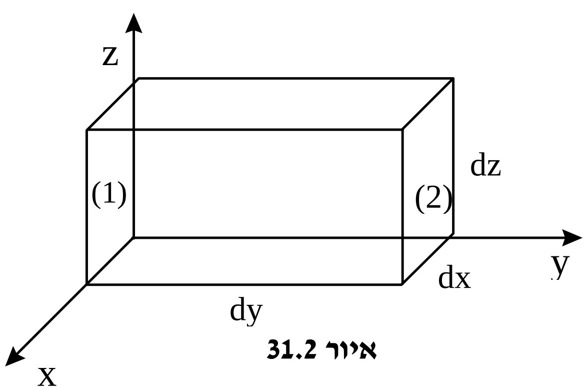
נבדוק את המשמעות הפיזיקלית של הדיברגנט.

נניח תחום בו זורמים מים. נוכל לדמיין לעצמנו שבכל נקודה במרחב נצייר וקטור $\bar{v}$ שיהיה שווה בגודלו ובכוונו למהירות המים בנקודה. הוקטור $\bar{v}$ מיצג שדה וקטורי. הקווים המשיקים ל- $\bar{v}$ נקראים קווי זרם (stream lines). נוכל לדון באותו מידה גם בזרימה של נוזל אחר כגון: גז, חום, חשמל או חלקיקים כלשהם. אנו נראה שאם $\bar{v}$ מיצג את מהירות הזרימה של כל אחד מהתכונות לעיל, אזי $div\bar{V}$ יהיה קשור לכמות החומר נטו שזורם החוצה מנפח נתון. כמות החומר שזורם החוצה יכולה להיות שונה מאפס אם בגלל שנוי צפיפות למשל (יותר אויר זורם החוצה מאשר פנימה בחדר מחומם) או כתוצאה ממקור או בולע בתוך הנפח. בדיוק אותה גישה עובדת גם בשדות חשמליים ומגנטיים כאשר $\bar{v}$ מייצג ע״י $\bar{E}$ (שדה חשמלי) או $\bar{B}$ (שדה מגנטי) והגודל המתאים לכמות החומר שזורמת החוצה נקרא בשם שטף חשמלי או שטף מגנטי.

נחזור לדוגמה שלנו של זרימת מים נגדיר וקטור חדש $\bar{V}=\rho\bar{v}$. כאשר ρ היא צפיפות המים בנקודה (x,y,z). כמות המים שעוברת בזמן t דרך שטח A' אשר ניצב לכוון הזרמים הוא כמות המים בגליל שחתכו A' וארכו $v\cdot t$. כמות זו הנה $A'\cdot v\cdot t\cdot\rho$ ראה איור 31.1 אותה כמות תעבור גם דרך שטח A. מכיון ש $A'=A\cos\theta$ אזי כמות המים העוברת דרך שטח A בזמן t תהיה: $A'\cdot v\cdot t\cdot\rho=vt\rho\cdot A\cos\theta$

כלומר, אם מים זורמים בכיון $\bar{V}$ ויוצרים זווית θ עם $\bar{n}$ (וקטור יחידה) הניצב למשטח, אזי כמות המים העוברים יחידת שטח ביחידת זמן על המשטח היא: $v\rho\cos\theta=V\cos\theta=\bar{V}\cdot\bar{n}$.

נוסחה זו לכמות הנוזל העוברת ביחידת שטח ביחידת זמן היא חשובה ביותר!



איור 31.2

שים לב ש- $\bar{V}$ תלוי בזורם בלבד ו $\bar{n}$ תלוי רק במשטח!

נדון באלמנט נפח $dxdydz$ בתחום בו המים זורמים או פנימה או החוצה מהנפח $dxdydz$ דרך אחת משש המשטחים $dxdy$, $dxdz$ וכו׳. נוכל לחשב את הכמות נטו הזורמת החוצה.

בציור רואים שקצב הזרם הנכנס לתוך $dxdydz$ דרך משטח (1) $dxdz$ ניתן ע״י $\bar{V}\cdot\bar{j}$ ליחידת שטח או $\bar{V}\cdot\bar{j}dxdz$ דרך כל אלמנט השטח $dxdz$.

היות ש- $\bar{V}\cdot\bar{j}=V_y$ אנו מוצאים שקצב הזרמים (כמות ליחידת זמן) דרך משטח (1) הוא $V_y dxdz$. באותו מידה הוא הקצב שהמים זורמים החוצה דרך משטח (2) אלא ש- V_y כאן הוא הערך של V_y במשטח (2) במקום (1).

אנו מעוניינים בהפרש של שני ערכי V_y : במשטח (2) פחות משטח (1) באותו x ו-z שנסמן ΔV_y.

הגודל ΔV_y ניתן בקרוב ע״י
$$dV_y = \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)dy$$

שכן $dx = dz = 0$.

ולכן זרימה החוצה נטו היא זרימה במשטח (2) פחות (1)

$$\left[V_y(2) - V_y(1)\right]dxdz = \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}dy\right)dxdz$$

באותו אופן נקבל עבור הזרמים נטו החוצה דרך הזוגות האחרים של המשטחים

דרך העליון והתחתון $\frac{\partial Vz}{\partial z}dxdydz$

דרך 2 המשטחים האחרים $\frac{\partial V_x}{\partial x}dxdydz$

ולכן ס״ה קצב כמות המים שיוצא מהנפח $dxdydz$ הנו:

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)dxdydz = div\overline{V}dxdydz$$

או
$$\overline{\nabla}\cdot\overline{V}dxdydz$$

אם נחלק ב- $dxdydz$ נקבל ש- $\overline{\nabla}\cdot\overline{V}$ משמעותו קצב יציאת המים ליחידת נפח.

זוהי המשמעות הפיזיקלית של הדיברגנט. זהו הקצב נטו (כמות מים ליחידת זמן) של הזרימה החוצה ליחידת נפח בנקודה (x,y,z).

זו הזרימה של חומר בנוזלים, גזים או חלקיקים אחרים. בשדות חשמליים ומגנטיים גודל זה נקרא שטף חשמלי או שטף מגנטי.

שים לב שזה כמו צפיפות. צפיפות היא מסה ליחידת נפח בנקודה מסוימת (x,y,z) ויכולה להשתנות מנקודה לנקודה. אותו דבר הדיברגנט יחושב בנקודה מסוימת ויכול להשתנות מנקודה לנקודה. $div\overline{V}$ יכול להיות שונה מאפס או בגלל שנוי הצפיפות או בגלל מקור או בולע שנמצאים באיזור!

נניח

φ - מקור נקודתי פחות בולע נקודתי שערכו הוא:

- כמות המסה של נוזל שנוצרת ביחידת נפח ביחידות זמן.

ρ - צפיפות הנוזל = מסה ליחידת נפח.

$\frac{\partial\rho}{\partial t}$ = קצב גידול המסה ליחידת נפח.

אזי גידול המסה באלמנט $dxdydz$ =קצב יצירה של חומר פחות קצב יציאה של חומר.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz = \varphi\,dxdydz - \overline{\nabla}\cdot\overline{V}dxdydzz$$

אם נחלק בנפח נקבל:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varphi - \overline{\nabla}\cdot\overline{V} \qquad (31.1)$$

או:
$$\overline{\nabla}\cdot\overline{V} = \varphi - \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

אם אין מקור או בולע אזי $\varphi = 0$ ונקבל:
$$\overline{\nabla}\cdot\overline{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (31.2)$$

משוואה זו נקראת **משוואת הרצף.**

אם הנוזל הנו בלתי דחיס אזי $\rho = const$ ונקבל:

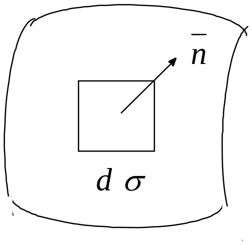
$$\varphi = \overline{\nabla} \cdot \overline{V} \tag{31.3}$$

31.1. משפט הדיברגנט

משפט הדיברגנט מקשר בין אינטגרל על נפח τ לבין אינטגרל על המשטח שמקיף את הנפח, σ.

ניסוח המשפט הוא: (31.4) $\iiint_{\tau} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\tau = \iint_{\sigma} \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma$

כאשר $\bar{n}$ הוא וקטור יחידה ניצב לאלמנט השטח (ראה איור 31.3)



איור 31.3

משמעות שני האגפים הוא ס״ה הזרימה היוצאת מהנפח.

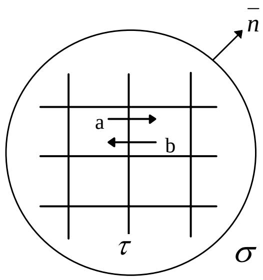
הוכחה:

ראינו כי $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\tau$ כמות המסה של הנוזל שזורמת דרך $d\sigma$ ביחידת זמן מצד שני $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\tau$ $(d\tau = dxdydz)$ כמות המסה שיוצאת מאלמנט הנפח $d\tau$ ביחידת זמן.

על מנת להמחיש את ההבנה של משפט הדיברגנט נתבונן באלמנט נפח המורכב משריג של תת נפחים (ראה איור 31.4).

אם נתבונן בגודל $\sum_i \bar{\nabla} \cdot \bar{V}\, d\tau_i$ כאשר הסכום על כל התת נפחים אזי גודל זה הוא גם הזרימה החוצה מכל הנפח τ.

הסיבה היא שהזרימות בתוך כל תת נפח פנימית מתבטלת. שכן בכל אלמנט שטח הזרימה מ- a ל- b שווה בדיוק לזרימה מ- b ל- a רק בסימן הפוך. לכן בכל אלמנט שטח פנימי הזרימה מתבטלת ונשארת רק הזרימה החוצה מכל הנפח τ.



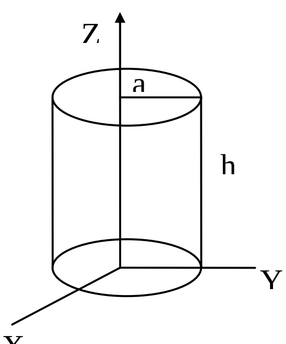
איור 31.4

הסכום $\sum \bar{\nabla} . \bar{V} d\tau i$ כאשר $o \leftarrow d\tau i$ הוא נכתב כאינטגרל כמו אגף שמאל ב- (31.4).

<u>דוגמה</u>:

נתון וקטור $\bar{V} = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{i}$

נחשב $\iint \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma$ על מעטפת של גליל באיור 31.5.



איור 31.5

משמעות גודל זה הוא כמות הנוזל היוצאת מתוך הגליל ביחידת זמן כאשר מהירותו $\bar{U}$ ניתנת ע״י $\bar{V} = P\bar{U}$.

לפי משפט הדיברגנט במקום לחשב אינטגרל זה נוכל לחשב אינטגרל נפחי, דהיינו האינטגרל $\iint \bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\tau$ על הנפח של הגליל. כפי שנראה חישוב זה הרבה יותר קל!

נחשב $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

אזי $\iint \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = \iiint \bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\tau = \iiint 3 d\tau = 3 \cdot \pi a^2 h$

ננסה לחשב את אינטגרל $\iint \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma$ באופן ישיר.

חישוב זה הרבה יותר מסובך אך נבצע זאת על מנת להראות דוגמה של חישוב אינטגרל על משטח וכדי להמחיש את משפט הדיברגנט במקרה פרטי זה.

אנו זקוקים לחשב וקטור יחידה $\bar{n}$ ניצב למשטח.

במשטח העליון (איור 31.7) $\bar{n} = \bar{k}$ ולכן $\bar{V} \cdot \bar{n} = \bar{V} \cdot \bar{k} = z = h$ ולכן במשטח

עליון: $\int \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = h \int d\sigma = h \cdot \pi a^2$

במשטח התחתון $\bar{n} = -\bar{k} \Leftarrow \bar{V} \cdot \bar{n} = -z = 0$.

ולכן האינטגרל במשטח התחתון הוא אפס. נחשב עתה את האינטגרל של חלק המשטח הגלילי.

נוכל לראות שהוקטור $x\bar{i} + y\bar{i}$ הוא ניצב למשטח ולכן $\bar{n} = \frac{x\bar{i} + y\bar{i}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{i}}{a}$.

דרך שיטתית לחשב וקטור נורמלי הוא בעזרת הגרדיינט.

אם משוואת המשטח היא $\Phi = x^2 + y^2 = const = a^2$ הרי $\bar{\nabla}\Phi$ הוא וקטור מאונך למשטח

$\bar{\nabla}\Phi = 2x\bar{i} + 2y\bar{i}$ וקיבלנו אותו וקטור כמו קודם.

לכן $\bar{V} \cdot \bar{n} = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$

ומכאן $\int V \cdot n d\sigma = a \int d\sigma = a$ (שטח המשטח) $= a \cdot 2\pi a \cdot h$ (האנטגרל על המשטח הגלילי)

ולכן סה״כ $\int V \cdot n d\sigma = \pi a^2 h + 2\pi a^2 h = 3\pi a^2 h$ גליל. כמו האינטגרל המשטחי.

משפט הדיבגרנט הוא מאוד חשוב בחשמל. בעזרתו וביחד עם חק גאוס ניתן לקבל את משוואת מקסוול $\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho$ כאשר ρ צפיפות המטען, $\bar{D}$ הוא המעתק החשמלי המוגדר ע״י $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$, $\bar{E}$ הוא השדה החשמלי ו- ε קבוע דיאלקטרי.