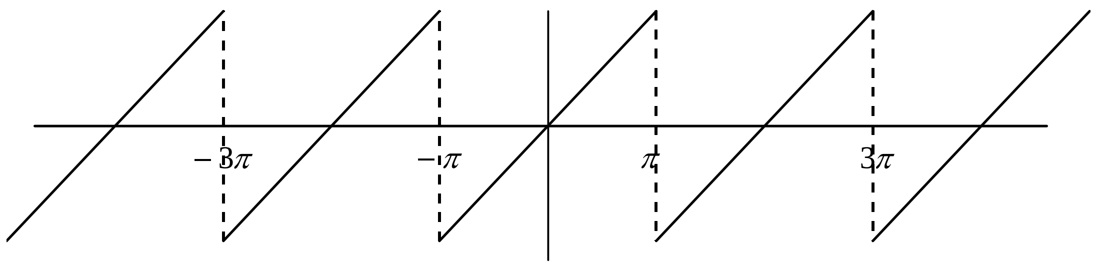
32. טורי פורייה

ראינו כיצד לפתח פונקציה לטור טילור בחזקות של $(x-x_0)$
לעתים קרובות פתוח כזה מאוד חשוב. נשאלת השאלה האם יש אפשרות לפתוח פונקציה לטור אחר.
פורייה פתח שיטה כיצד לפתח פונקציה המוגדרת ברווח $(0,l)$ או $(-l,l)$
לטור אינסופי של פונקציות טריגונומטריות.
נגדיר פונקציה מחזורית:
פונקציה $f(x)$ תקרא פונקציה מחזורית במחזור p אם לכל x
קיים $f(x+p)=f(x)$ .p הקטן ביותר נקרא מחזור הפונקציה.
לדוגמה $\sin x$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור 2π שכן
$f(x+2\pi)=f(x)$ לכל x.
דוגמה: פונקציה $f(x)=x$ בתחום $-\pi<x<\pi$
וממשיכה מחוץ לתחום בצורה מחזורית:



איור 32.1

משפט פורייה אומר שכל פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π
ניתן לפתח לטור הבא

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)} \quad (32.1)$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

ישנם הרבה תופעות מחזוריות בטבע, כמו גל קול, גלים אלקטרומגנטיים, אוסצילטור הרמוני, תנודות אטומים וכו׳. בד״כ גל קול לא כולל רק גל בתדירות אחת (טון טהור). בד״כ מקבלים גל יסודי מלווה במספר הרמוניות בתדירויות פי 4,3,2 וכו׳ מהתדירות היסודית.
אם הפונקציות המחזוריות $\sin\omega t$ ו- $\cos\omega t$ מתאימות לגל בעל התדירות היסודית הרי $\cos n\omega t$ $\sin n\omega t$ מתאימות להרמוניקות הגבוהות ביותר.
הקומבינציה של הגל היסודי עם ההרמוניקות שלו היא פונקציה מחזורית מסובכת עם מחזור כשל היסודית.
אם נתונה לנו פונקציה מחזורית כלשהי נוכל לשאול עצמנו איך לכתוב אותה כקומבינציה של ההרמוניות.
בד״כ נזדרקים לכל ההרמוניות כלומר נקבל טור אינסופי. טור זה נקרא טור פורייה.
בעיתנו היא איפוא לפתח פונקציה מחזורית נתונה בטור של $\sin\omega t$ ו- $\cos\omega t$

על מנת לפשט הנוסחות בתחילה נטפל בפונקציות בעלות מחזור של 2π
והפונקציות היסודיות יהיו $\sin nx$ ו- $\cos nx$. אח״כ נטפל בפונקציות בעלות מחזור שונה.
הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ בעלות מחזור 2π ולכן נניח שאם $f(x)$
בעלת מחזור 2π היא נתונה לכתיבה ע״י טור פורייה:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\ldots+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

כאשר a_n ו- b_n ניתנו למעלה.
לפני שנעבור להוכיח את הנוסחות ל- a_n ו- b_n נזדקק לאינטגרלים הבאים:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x)=$$

לכל m ו- n

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{1}{2} & m=n\neq 0\\ 0 & m=n=0\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{1}{2} & m=n\neq 0\\ 1 & m=n=0\end{cases}$$

אנו נצא עתה מהנחה שאמנם פתוח פורייה (32.1) אפשרי
ונראה כיצד נחשב את a_n ו- b_n.
כדי לחשב את a_0 נבצע אנטגרל בין $-\pi$ ל- π בשני האגפים של (32.1).

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dxf(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx+a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}cosxdx+a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}cos2xdx+\ldots+b_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}sinxdx+\ldots$$

באגף ימין כל האינטגרלים שווים לאפס פרט לראשון.

כלומר
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

נחשב a_1 נכפיל (32.1) ב2- האגפים ב- $\cos x$ ונבצע אינטגרל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx+a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}cos^2xdx+a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos xcos2xdx+\ldots+$$

$$+b_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos xsinxdx+\ldots$$

אבל כל האנטגרלים באגף ימין אפס פרט ל-

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx$$

השיטה ברורה עתה, כדי למצא את a_n נכפיל 2 האגפים ב (32.1) ב - $\cos nx$ ונבצע אנטגרציה מ- π - עד π

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxf(x)dx=\frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+a_1\int_{-\pi}^{\pi}cosx\cos nxdx+a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxcos2xdx+\ldots+$$

$$+b_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxsinxdx+\ldots$$

כל המחוברים באגף ימין מתאפסים פרט ל-

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi$$

ולכן

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

שים לב שזה כולל גם את a_0 ולכן לקחנו המחובר הראשון $\frac{1}{2}a_0$.

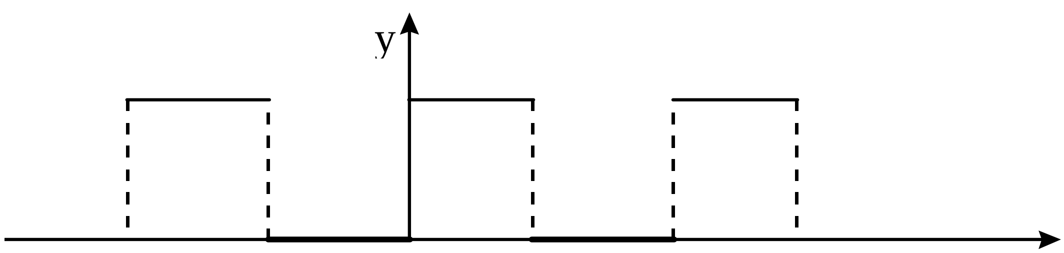
על מנת לחשב b_n נכפיל שני האגפים של (33.1) ב $\sin nx$ נבצע אינטגרציה מה- π - עד π ואז נקבל

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

הוכחנו מהם המקדמים בהנחה שהפתוח אפשרי אך לא הראנו שהפתוח קיים.

<u>דוגמה:</u>

פתח לטור פורייה את הפונקציה הבאה:



איור 32.2

פונקציה זו יכולה לתאר למשל פולס מתח חשמלי מחזורי.
הבטויים בטור פורייה יתנו את התדירויות השונות שיוצרות "גל של מתח רבועי".
וערכי המקדמים יתנו את המשקל היחסי של כל תדירות. כך מיצרים באופן מעשי במעבדה גל מתח רבועי.

שים לב כי ל- $f(x)$ מחזוריות 2π. בד"כ בבעיות יהיה נתון $f(x)$ רק עבור מחזור אחד. במקרה זה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

והפונקציה $f(x)$ ממשיכה באופן מחזורי גם מחוץ לתחום $(-\pi,\pi)$.

נחשב את המקדמים a_n ו- b_n.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}1\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$

עבור $n=0$ $a_0=1$ ולכל n שונה מאפס $a_n=0$.

נחשב את b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}1\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\right)_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{2}{n\pi} & n=2k+1\end{cases}$$

ואז נקבל

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$$

טור זה, אם נצייר אותו נקבל את הפונקציה שבאיור.

בנקודות האי רציפות נקבל את הערך הממוצע, במקרה זה $\frac{1}{2}$.

למשל: $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

32.1 משפט דיריקלה:

א. אם $f(x)$ מוגדרת וחד ערכית פרט אולי למספר סופי של נקודות ברווח $(-l,l)$
אצלנו $(-\pi,\pi)$.
ב. מחזורית מחוץ ל- $(-\pi,\pi)$ עם מחזור 2π.
ג. $f(x)$ ו- $f'(x)$ רציפות למקוטעין בין $-\pi$ ל- π.
אזי טור פורייה עם מקדמיו a_n ו- b_n מתכנס
א. ל- $f(x)$ אם x נקודה רציפה.
ב. ל- $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ אם x נקודת אי רציפות.
כאשר $f(x^+)$ $f(x^-)$ גבול ימני ושמאלי בהתאמה.

תנאים אלו הם **מספיקים** אבל לא **הכרחים** ובד"כ הם קיימים בבעיות מעשיות.

כיום לא ידוע שום תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות של טור פורייה.

בדוגמה שלנו אם נציב $x=0$ נקבל $f(x)=\frac{1}{2}$

והסבה כיון ש $x=0$ היא נקודת אי רציפות!

32.2 הצורה המורכבת של טורי פורייה

נזכור כי:
$$\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}=\cos nx \qquad \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=\sin nx$$

ואם נציב קשרים אלו בפתוח לטור פורייה נקבל טור של אקספוננטים.
אנו נמצא את הטור באופן ישיר וזו דרך מקובלת יותר וקלה יותר מאשר שמוש ב $\sin nx$ ו $\cos nx$.

נניח:
$$f(x)=C_0+C_1e^{ix}+C_{-1}e^{-ix}+C_2e^{2ix}+C_{-2}e^{-2ix}+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inx} \qquad (32.2)$$

וננסה למצא את C_n השונים.
נחשב C_o ע"י אינטגרציה על שני האגפים

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}C_0dx+C_1\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix}dx+C_2\int_{-\pi}^{\pi}e^{2ix}dx+\ldots$$

אבל עבור $n\neq 0$

קיים
$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}dx=\frac{1}{in}\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right)=\frac{2}{n}(\sin n\pi)=0$$

ואילו
$$\int C_0dx=C_0\cdot 2\pi$$

ולכן
$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

ע"מ למצא את C_n $(n\neq 0)$ נכפיל הטור ב e^{-inx} ונבצע אנטגרציה על x כלומר:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = C_0\int_{-\pi}^{\pi} e^{-unx}dx + C_1\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{ix}dx + C_{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{-ix}dx+........+$$
$$+C_n\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{inx}dx+........$$

כל האברים חוץ מהמקדם של C_n יתאפסו ולכן נקבל

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \qquad (32.3)$$

לכל n.

שים לב שנוסחה זו נכונה לכל n חיובי, שלילי ואפס. ולכן היא קלה, יותר לזכרון ולחשובים.

נחזור לדוגמה הקודמת, גל מתח ריבועי, ונפתח אותו באמצעות טור פורייה של אקספוננטים:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\,0dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\,1dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{-2\pi in}\left(e^{-inx}-1\right) = -\frac{1}{2\pi in}(\cos n\pi - i\sin n\pi - 1) =$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi in} & n = 2k+1\\ 0 & n = 2k, n \neq 0\end{cases}$$

עבור $n = 0$ מקבלים

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

ומכאן הטור פורייה יהיה:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{3ix}}{3} + \frac{e^{5ix}}{5} + ...\right) +$$
$$+\frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{-ix}}{-1} + \frac{e^{-3ix}}{-3} + \frac{e^{-5ix}}{-5} + ...\right)$$

כך לראות שזה אמנם הטור הקודם:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{1}{3}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + ...\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + ...\right)$$

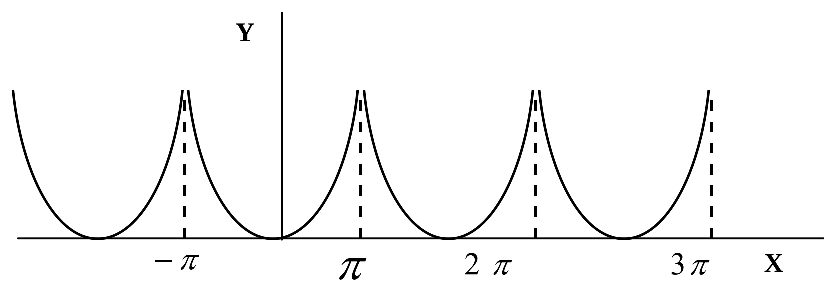
32.3 פונקציות מחזוריות כלליות

עד כה דנו בפונקציות בעלות מחזור 2π.
לכן פתחנו בעזרת הפונקציות $\sin nx$, $\cos nx$, e^{inx} שלהם יש מחזור של 2π.

הערה: שים לב כי האנטגרל שבצענו לחשב a_n b_n c_n עשינו בין $-\pi$ ל- π.

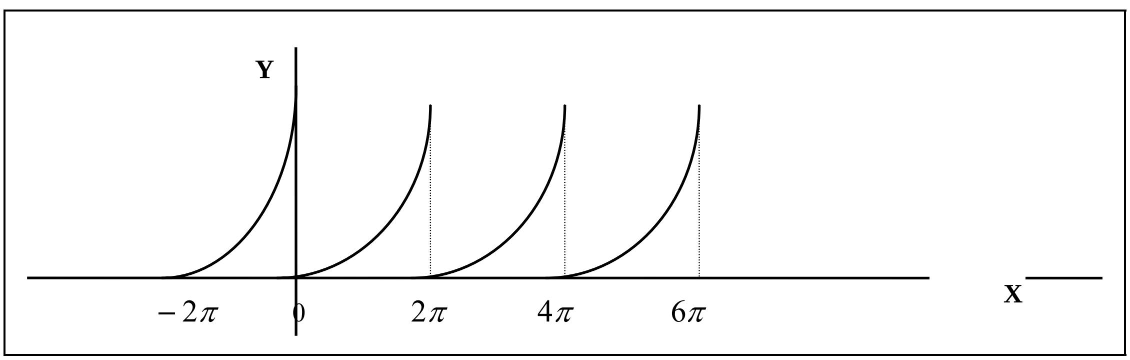
אם הפונקציה המחזורית היא בין 0 ל- 2π נבצע גם את האנטגרלים בין- 0 ל- 2π או בין כל רווח אחר שגדלו 2π.

יש חשיבות גדולה לשרטט הגרף ע"מ לראות באופן ברור באיזה תחום מדובר.
למשל נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$ בין $(-\pi,\pi)$ והיא ממשיכה מחזורית לכל תחום אזי הגרף נראה כמו באיור 32.3:



איור 32.3

בעוד שאם נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$ בין $(0,2\pi)$ והיא ממשיכה מחזורית לכל תחום זה יראה אחרת כמו איור 32.4 .



איור 32.4

לכן במקרה הראשון נצטרך לקחת אנטגרל מ- $-\pi$ עד π כדי למצא המקדמים.
בעוד שבמקרה השני האנטגרל מ- 0 עד 2π.
בעיות בפיסיקה לא מופיעות תמיד עם מחזוריות של 2π.

נניח שנדון בפונקציה שמחזורה $2l$ נצטרך לפתח את הפונקציה לפונקציות בעלות מחזור של $2l$.

וזאת קל לקבל

לפונקציות $\sin\frac{n\pi x}{l}$, $\cos\frac{n\pi x}{l}$ ו- $e^{\frac{in\pi x}{l}}$ יש מחזור $2l$. ואמנם

$$\sin\frac{n\pi}{l}(x+2l)=\sin\left(\frac{n\pi x}{l}+2\pi n\right)=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

וכך לגבי $\cos\frac{n\pi x}{l}$ ו- $e^{\frac{in\pi x}{l}}$.

ואז נניח פתוח לטור הבא

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+........+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi}{l}+.....=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

וכן

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

שים לב שכאשר $2l=2\pi$ כלומר $l=\pi$ חוזרים לבטויים הקודמים.

באותה דרך כמו קודם קל להוכיח כי

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

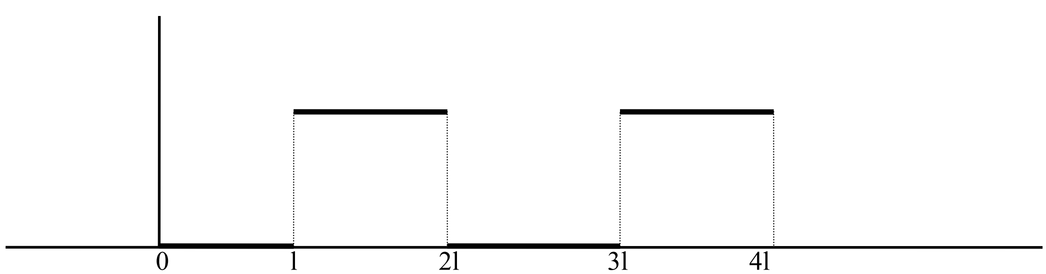
$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{\frac{-in\pi x}{l}}dx$$

אם הרווח הבסיסי הוא $(0,2l)$ האנטגרל פשוט משתנה מ- 0 עד $2l$.

דוגמה: נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<l\\ 1 & l<x<2l\end{cases}$$

פתח $f(x)$ לטור פורייה אקספוננציאלי בעל מחזור $2l$ (ראה איור 32.5).



איור 32.5

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_0^l 0dx + \frac{1}{2l}\int_l^{2l} 1e^{\frac{-in\pi x}{l}}dx \qquad e^{i\alpha} = \cos\alpha + isiu\alpha$$

$$= \frac{1}{2l}\frac{e^{\frac{-in\pi x}{l}}}{-in\pi/l}\Big|_l^{2l} = -\frac{1}{2in\pi}\left(e^{-2in\pi} - e^{-in\pi}\right) = \qquad e^{-i2n\pi} = \cos 2n\pi - i\sin 2n\pi = 1$$

$$= -\frac{1}{2in\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2k, n \neq 0 \\ -\frac{1}{in\pi} & n = 2k+1 \end{cases} \qquad e^{-in\pi} = \cos n\pi - i\sin\pi = \cos n$$

$$C_0 = \frac{1}{2l}\int_l^{2l} dx = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{i\pi}\left(e^{\frac{i\pi x}{l}} - e^{-\frac{i\pi x}{l}} + \frac{1}{3}e^{\frac{3i\pi x}{l}} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3i\pi x}{l}} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots\right)$$

32.4 פונקציות זוגיות ואי זוגיות

בפתות לטור פורייה רצוי להבחין בין פונקציה זוגית לאיזוגית.
כבר הגדרנו

פונקציה $f(x)$ תקרא **זוגית** אם $f(x)=f(-x)$

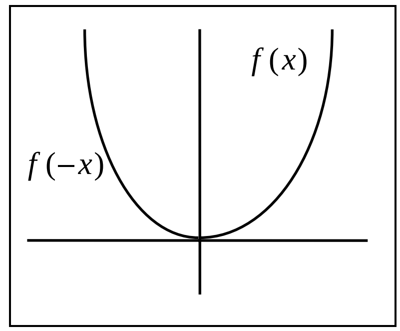
דוגמאות: x^4, $2x^4-3x^2+7$, $\cos x$, e^x+e^{-x}

פונקציה $f(x)$ תקרא **איזוגית** אם $f(x)=-f(-x)$

דוגמאות: x^3, x^5-7x^3+2x, $\sin x$, $tg3x$

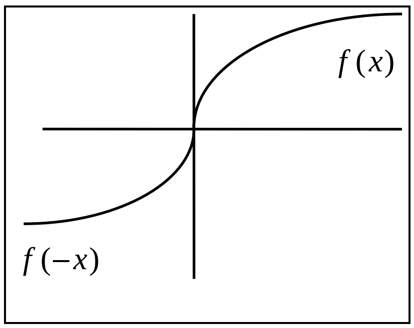
יש פונקציות שאינם זוגיות ואינם איזוגיות למשל $y=x+3$.

תאור גרפי של פונקציה זוגית



איור 32.6

תאור גרפי של פונקציה איזוגית



איור 32.7

משפט:

בטור פורייה של פונקציה זוגית יופיעו רק אברי הקוסינוס(+ הקבוע)

בטור פורייה של פונקציה אי זוגית יופיעו רק אברי הסינוס.

הוכחה: נוכיח כי לפונקציה זוגית $b_n=0$ לכל n.

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=$$

נציב באינטגרל הראשון $x=-u$ ונקבל

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{1}{l}\int_{l}^{0} f(-u)\sin\frac{-n\pi u}{l}du=$$

$$=-\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(u)\sin\frac{n\pi u}{l}du$$

כלומר:

$$b_n=\frac{-1}{l}\int_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0$$

זה נובע גם מהעובדה שמכפלה של פונקציה זוגית באי זוגית נותנת פונקציה אי זוגית והאנטגרל על פונקציה איזוגית מ l- עד l נותן 0 בגלל השטחים השווים בסימנים הפוכים המבטלים זה את זה.

אם $F(x)$ היא מכפלה של פונקציה זוגית באי זוגית הרי היא פונקציה אי זוגית וקיים:

$$\int_{-L}^{L} F(x)dx = 0$$

הוכחה: $f_1(x)\cdot f_2(x) = -f_1(-x)\cdot f_2(-x)$

פונקציה אי זוגית! = אי זוגית × זוגית

שכן:
$$f_1(-x) = f_1(x)$$
$$f_2(-x) = -f_2(x)$$

ומכאן $f_1(-x)\,f_2(-x) = -f_1(x)\,f_2(x)$ והמכפלה החא פונקציה אי זוגית.

כאשר $f(x)$ היא אי זוגית $a_n = 0$. הוכחה:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$x \to -x$$

$$= -\frac{1}{l}\int_{l}^{0} f(-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0$$

32.5 משפט PARSEVAL

משפט פרסול מקשר בין ממוצע של רבוע פונקציה $f(x)$ במחזור והמקדמים של פורייה. מטרת המשפט אינה לחשב ממוצעים אלא להראות קשר חשוב בין ממוצעים של $f^2(x)$ למקדמי פורייה.

נניח
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

נעלה ברבוע את $f(x)$ ואז נחשב ממוצע מ- $-\pi$ עד π.

הממוצע של $f^2(x)$ הוא $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

כאשר מעלים ברבוע את שני האגפים מקבלים ביטויים רבים. כדי למנוע כתיבת רבים מהם נדון אילו סוגי ביטויים מופיעים ומה הממוצע שלהם.
תחילה מופיעים כל רבועי הבטויים האנדיוידואלים נשתמש בעובדה ש-

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}$$

קוראים לבטוי זה ממוצע של $\sin^2 nx$ ו- $\cos^2 nx$.

ממוצע של $\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2$ הוא $\frac{1}{4}a_0^2$

ממוצע של $(a_n\cos nx)^2$ הוא $a_n^2\cdot\frac{1}{2}$

ממוצע של $(b_n\cos nx)^2$ הוא $b_n^2\cdot\frac{1}{2}$.

ועכשיו יש ביטויים מעורבים מהצורה

$$2\cdot\frac{1}{2}a_0a_n\cos nx,\ 2\cdot\frac{1}{2}a_0b_n\sin nx,\ 2a_nb_n\cos nx\cos mx(m\neq n)$$

ממוצע של כל הבטויים האלה הוא אפס!

ולכן משפט Parsvel:

ממוצע
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2$$