

**3.3. משואות דיפרנציאליות - מבוא**

משואה דיפרנציאלית (מ"ד) היא משואה הכוללת נגזרות או דיפרנציאלים.  
**דוגמאות:**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad (33.1)$$

$$dy = (x + 2y)dx \quad (33.2)$$

$$y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (33.3)$$

בפיזיקה ודאי נתקלתם במשואות דיפרנציאליות.

למשל אם ידועה התאוצה  $\frac{d^2 y}{dt^2} = -5$  מהו  $y$ .

משואות דיפרנציאליות יש להם חשיבות עצומה בפיסיקה במיוחד בבעיות של תנועה (דינמיקה). משואה דיפרנציאלית המכילה משתנה בלתי-תלוי אחד ולכן יש בה רק נגזרות רגילות נקראת משואת דיפרנציאלית רגילה.

אם יש שני משתנים בלתי-תלויים או יותר, אז המשואה מכילה נגזרות חלקיות והיא נקראת משואת דיפרנציאלית חלקית.

**דוגמה:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (33.4)$$

המשואות הקודמות היו מ"ד רגילות. אנו במסגרת קורס זה נעסוק במ"ד רגילות ונקרא להם משואות דיפרנציאליות.

ממיינים משואות דיפרנציאליות לסוגים שונים על פי **סדר ומעלה** (order ו-degree). הסדר של משואה דיפרנציאלית הוא סדר הנגזרת הגדול ביותר המופיע במשואה. משואה (33.1) הוא מסדר שני.

משואות (33.2) (33.3) הם מסדר ראשון.

המשואה (33.4)  $\frac{d^3 y}{dx^3} - 5x \frac{dy}{dx} = 8$  היא מסדר שלישי.

**המעלה** של משואה דיפרנציאלית היא המעלה של הנגזרת בעלת הסדר הגבוהה ביותר.

משואה (33.1) (33.2) (33.4) ממעלה ראשונה

משואה (33.3) ממעלה שניה.

המשואה (33.5)

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 7 \quad (33.5)$$

היא ממעלה ראשונה.

**פתרון** של משואה דיפרנציאלית היא פונקציה המקיימת את המשואה זהותית (לכל  $x$ ).  
**לדוגמה:**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

משואה (33.1)

אם נניח

$$y = f(x) = A \sin x + B \cos x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -A \sin x - B \cos x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = -A \sin x - B \cos x + A \sin x + B \cos x = 0$$

מקבלים זהותית אפס ולכן אנו אומרים כי  $y = f(x) = A \sin x + B \cos x$  הוא פתרון של המ"ד. מהדוגמה הנ"ל אנחנו רואים שפתרון מ"ד עשוי לכלול שני קבועים שרירותיים. ניתן להוכיח שהפתרון הכללי ביותר של משואה דיפרנציאלית מסדר  $n$  מכיל  $n$  קבועים שרירותיים.

פתרון כזה נקראה פתרון כללי של המשואה.

פתרון פרטי או מסויים מתקבל ע"י שנותנים ערכים מסוימים לקבועים השרירותיים.

**דוגמה:** הראה כי  $y = 5e^x$ ,  $y = 2x$  ו-  $y = C_1 e^x + C_2 x$ ,

כאשר  $C_1$  ו-  $C_2$  קבועים שרירותיים הם פתרונות של המ"ד  $y''(1-x) + y'x - y = 0$

הוכחה:

$$y = 5e^x$$

א.

$$y' = 5e^x$$

$$y'' = 5e^x$$

$$5e^x(1-x) + 5e^x x - 5e^x = 0$$

ואמנם

ב.

$$y = 2x$$

$$y' = 2$$

$$y'' = 0$$

$$0(1-x) + 2x - 2x = 0$$

ולכן גם זה פתרון.

$$y = C_1 e^x + C_2 x$$

ג.

$$y' = C_1 e^x + C_2$$

$$y'' = C_1 e^x$$

$$C_1 e^x(1-x) + (C_1 e^x + C_2)x - (C_1 e^x + C_2 x) = 0$$

כלומר ג' הוא הפתרון הכללי של מ"ד כי הוא פתרון מסדר שני וכולל 2 קבועים שרירותיים פתרונות א' וב' הם פתרונות מסוימים.

כפי שראינו באינטגרלים, גם כאן אין שיטה כללית לפתור מ"ד.

אנו נביא מספר שיטות חשובות למציאת פתרון כללי למקרים מיוחדים וחשובים של משואות דיפרנציאליות רגילות. בעיקר נטפל בבעיה של מציאת פתרון למשואה דיפרנציאלית נתונה. אולם לעתים יש צורך לענות על השאלה ההפוכה. נתון קשר בין  $x$  ו-  $y$  המכיל  $n$  קבועים שרירותיים מהי המשואה הדיפרנציאלית בעלת הסדר הנמוך ביותר שפונקציה זו תהיה פתרון כללי שלה?

פונקציה זו שממנה בונים מ"ד נקראת פונקציה פרמיטיבית: באופן כללי ניתן למצא המ"ד ע"י גזירת הפונקציה הפרימיטיבית  $n$  פעמים ואז לחלץ את  $n$  קבועים מתוך  $n+1$  משוואות. כדאי להראות זאת ע"י דוגמה.

**דוגמאות:**

**(1)** מצא מ"ד שהפונקציה  $x^2 + y^2 - 2cx = 0$  פתרון שלה.

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2c = 0 \quad \text{נגזור לפי } x$$

$$x + y \frac{dy}{dx} = c \quad \text{נחלץ את } C:$$

ונציב בפונקציה הפרימיטיבית:

$$x^2 + y^2 - 2\left(x + y \frac{dy}{dx}\right)x = 0$$

או

$$x^2 + y^2 - 2x^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

שים לב כי יכולנו לחלץ את הקבוע ע"י גזירה נוספת

$$1 + y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

אולם זו לא המשוואה מהסדר הנמוך ביותר שניתן לקבל ולכן זו אינה המשוואה הדרושה.

**(2)** קבל את המשוואה הדיפרנציאלית אשר הפתרון הכללי הוא

$$y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$$

נגזור 3 פעמים

$$y' = 3C_1 x^2 + C_2$$

$$y'' = 6C_1 x$$

$$y''' = 6C_1$$

$$y'' = y''' x$$

נציב המשוואה האחרונה במשוואה הקודמת ונקבל

כלומר זו המשוואה המבוקשת.