34. משוואות מסדר ראשון וממעלה ראשונה.

34.1 הפרדת משתנים

תמיד כאשר מחשבים אינטגרל מהטיפוס

$$y = \int f(x)dx$$

למעשה פותרים משוואה דיפרנציאלית מהצורה

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

זוהי דוגמה פשוטה למשוואה דיפרנציאלית.
ניתן לכתוב אותה גם בצורה של דיפרנציאל.

$$dy = f(x)dx$$

כלומר באגף אחד נמצא רק y ובאגף שני רק x במקרה כזה המשוואה נקראת **ניתנת להפרדה.**
והאנטגרל מתקבל ע״י בצוע אינטגרציה שני אגפים.

דוגמאות:

1)

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$dy = -aydx$$

$$\frac{dy}{y} = -adx$$

נבצע אנטרל על שני האגפים נקבל

$$\ln y = -ax + C$$

$$y = e^{-ax+C} = e^C e^{-ax} = Ae^{-ax}$$

כלומר הפתרון הכללי

$$y = Ae^{-ax}$$

2)

$$xy' = y + 1 \quad / y+1$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y+1}dy = \frac{1}{x}dx$$

נבצע אינטגרציה של שני האגפים

$$\ln(y+1) = \ln x + C = \ln(ax)$$

$$y + 1 = ax$$

$$y = ax - 1$$

3)

פתור

$$e^{x^2}\sec ydx + \frac{1}{x}\sin ydy = 0 \quad / \cdot x / \sec y$$

$$e^{x^2}xdx + \cos y \sin ydy = 0$$

המשוואה ניתנת איפוא להפרדת משתנים ולכן הפתרון ע״י אינטגרציה

$$\int e^{x^2}xdx + \int \cos y \sin y\, dy = C$$

$$\frac{e^{x^2}}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 y=C$$

או הפתרון:

$$e^{x^2}+\sin^2 y=C$$

4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$$
$$\frac{dy}{\cos^2 y}=\frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$tgy=-\cot x+C$$
$$y=arct(-\cot x+C)$$

התחלנו ללמוד פתרון סוגים שונים של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון וממעלה ראשונה. טיפלנו במקרה של הפרדת משתנים.

אם המשוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ או $dy=f(x,y)dx$ ואם

$$f(x,y)=\frac{A(x)}{B(y)}$$

אזי ניתן לכתוב

$$B(y)dy-A(x)dx=0$$

וניתן לבצע אינטגרל על שני אגפים

$$\int B(y)dy-\int A(x)dx=const$$

וכך לפתור המשוואה.

נראה דוגמה נוספת

5)

$$\cot x\, y'=-(y+3)$$
$$F(x,y)=-(y+3)tgx$$
$$\frac{dy}{dx}=-(y+3)tgx$$
$$\frac{dy}{y+3}+tgxdx=0$$
$$\ln(y+3)-\ln\cos x=C$$
$$y+3=const\cdot\cos x$$
$$y=-3+k\cos x$$

ניתן להוכיח שזה פתרון ע"י גזירה

אגף שמאל:

$$\frac{dy}{dx}=-k\sin x$$

אגף ימין:

$$-(y+3)tgx=-k\cos xtgx=-k\sin x$$

ברור שלא כל משואה ניתנת להפרדת משתנים.
לדוגמה:

$$dy = \cos(xy)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = xy + \frac{1}{x}$$

נעבור עתה לטפול בסוג פשוט אחר של משואות מסדר ראשון, שניתן להביא להפרדת משתנים.

34.2 פונקציה של מנה Y/X

סוג שני של משואות יהיה מהצורה

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

כאשר

$$F(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

במקרה זה נציב במקום $\frac{y}{x} = z$

ונקבל באגף שמאל:

$$y = zx \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

כלומר נקבל

$$z + x\frac{dz}{dx} = g(z)$$

$$x\frac{dz}{dx} = g(z) - z$$

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

ואז

$$\int \frac{dz}{g(z) - z} - \int \frac{dx}{x} = const$$

לדוגמה:

$$xy' = \left(x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y\right) \quad / x$$

$$y' = \sec\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

נציב

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = \sec z + z$$

$$x\frac{dz}{dx} = \sec z$$

$$\frac{dz}{\sec z} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\cos z dz - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\sin z - \ln x = C$$

$$\sin z = \ln x + C$$

$$z = \arcsin(\ln x + C)$$

$$y = x \arcsin(\ln x + C)$$

ראוי להעיר שבשיטה זו ניתן גם לעתים לפתור ממעלה שניה.

לדוגמה:

$$x(y'^2 - 1) = y$$

$$y'^2 - 1 = \frac{y}{x}$$

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x} + 1} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = z \quad y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = \sqrt{z+1}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{z+1} - z$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z+1} - z} - \frac{dx}{x} = 0$$

דוגמה (2):

$$(y^2 + xy)dx + 3x^2 dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + xy}{3x^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = z$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}(z^2 + z)$$

$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}z^2 - \frac{4}{3}z$$

$$\frac{dz}{\frac{1}{3}(z^2 + 4z)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{3dz}{z^2 + 4z + 4 - 4} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{3dz}{(z+2)^2-4}+\frac{dx}{x}=0$$

$$\frac{3}{4}\ln\frac{z}{z+4}+\ln x=C$$

$$3\ln\frac{y}{y+4x}+4\ln x=C'$$

הפתרון:

$$\frac{y^3x^4}{(y+4x)^3}=C''$$

34.3 מקדמים ליניאריים ב- X ו- Y

סוג שלישי של משוואות שאפשר להביאם לצורה של הפרדת משתנים הם משוואות מהצורה

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

אם $c_1=c_2=0$ אזי נקבל את המקרה הפרטי

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(a_1x+b_1y)}{a_2x+b_2y}=-\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}$$

שזה המקרה הקודם.

אולם אם c_1 או c_2 או שניהם שונים מאפס אזי לא מקבלים תוצאה כנ"ל.

אולם ניתן להתגבר על קושי זה ע"י החלפת משתנה. נציב משתנה חדש

$$u=x-\alpha$$
$$v=y-\beta$$

כאשר α ו- β נקבע אותם אח"כ

אזי נקבל

$$x=u+\alpha$$
$$y=v+\beta$$
$$\big(a_1u+b_1v+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)\big)du+\big(a_2u+b_2v+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)\big)dv=0$$

לכאורת אנו באותה בעיה כמקודם כיון שיש לנו קבוע. אולם אין הדבר כן שכן אנו יכולים לבחור את α ו- β כרצוננו.

ואומנם נבחר אותם כך שיקיימו את סט המשוואות

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta=-c_1\\a_2\alpha+b_2\beta=-c_2\end{cases}$$

ואז נקבל משואה

$$\big(a_1u+b_1v\big)du+\big(a_2u+b_2v\big)dv=0$$

משואה שניתנת לפתירה בהפרדת משתנים.

לדוגמה:

$$(2x-y)dx+(x-2y-3)dy=0$$

נציב

$$x=u+\alpha$$
$$y=v+\beta$$
$$(2u-v+2\alpha-\beta)du+(u-2v+\alpha-2\beta-3)dv=0$$
$$\begin{cases}2\alpha-\beta=0\\\alpha-2\beta-3=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-2\end{cases}$$

ולכן נקבל

$$(2u-v)du+(u-2v)dv=0$$

$$\frac{dv}{du}=-\frac{2u-v}{u-2v}=-\left(\frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}\right)$$

נציב

$$z=\frac{v}{u}\quad v=uz$$

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}=\frac{z-2}{1-2z}$$

$$(1-2z)\left(z+u\frac{dz}{du}\right)=z-2$$

$$z+u\frac{dz}{du}-2z^2-2zu\frac{dz}{du}=z-2$$

$$\frac{dz}{du}(u-2zu)=2z^2-2$$

$$\frac{dz}{du}=\frac{2(z^2-1)}{u(1-2z)}$$

$$\frac{dz(1-2z)}{z^2-1}-2\frac{du}{u}=0$$

$$\int\frac{dz}{z^2-1}-\int\frac{2zdz}{z^2-1}-2\int\frac{du}{u}=const$$

בעזרת

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

נקבל

$$\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}-\ln(z^2-1)-2\ln u=const$$

$$\frac{(z-1)^{1/2}}{(z^2-1)(z+1)^{1/2}u^2}=c$$

$$\frac{(z-1)}{(z^2-1)^2(z+1)u^4}=c$$

$$(z-1)(z+1)^3u^4=k$$

$$\left(\frac{v}{u}+1\right)^3\left(\frac{v}{u}-1\right)u^4=k$$

$$(v+u)^3(v-u)=k$$
$$v=y+2$$
$$u=x+1$$
$$(x+y+3)^3(y-x+1)=k$$

34.4 משוואות ליניאריות

משוואה מהצורה:

$$\boxed{y' + Py = Q} \quad (34.6)$$

כאשר P ו- Q פונקציות של x בלבד נקראת משוואה ליניארית מסדר ראשון. נראה כיצד לפתור משוואה כזו. נדון תחילה במקרה הפשוט $Q = 0$. אז המשוואה נקראת הומוגנית והיא

$$\boxed{y' + Py = 0} \quad (34.7)$$

או

$$\frac{dy}{dx} = -Py$$

$$\frac{dy}{y} = -Pdx$$

$$\ln y = -\int Pdx + c$$

$$y = e^{-\int Pdx + c} = Ae^{-\int Pdx} \quad A = e^c$$

למען הפשטות נסמן

$$I = \int Pdx$$

כלומר

$$\frac{dI}{dx} = P$$

ואז הפתרון

$$y = Ae^{-I}$$

או

$$ye^I = A$$

נגזור משוואה זו לפי x

$$\frac{d}{dx}(ye^I) = y'e^I + ye^I \frac{dI}{dx} = y'e^I + ye^I P = e^I(y' + Py)$$

נחזור למשוואה המקורית

$$y' + Py = Q$$

נכפיל ב e^I שני האגפים

$$(y' + Py)e^I = Qe^I$$

נציב התוצאה הקודמת ונקבל

$$\frac{d}{dx}\left(ye^I\right) = Qe^I$$

היות ו- Q ו- e^I פונקציות של x בלבד. אזי נוכל לבצע אינטגרציה על שני אגפים

$$ye^I = \int Qe^I dx + c$$

ונקבל פתרון

$$\boxed{y = e^{-I}\int Qe^I dx + ce^{-I}} \quad (34.8)$$

כאשר

$$I = \int Pdx$$

זהו הפתרון הכללי של משואה (34.6) יש בו קבוע אחד.

כדאי לדעת פתרון כללי זה כיון שמשואה לינארית מסדר ראשון מופיעה לעתים קרובות.

דוגמה:

$$x^2 y' - 2xy = \frac{1}{x}$$

בצורה שלנו

$$y' - \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3}$$

$$P = -\frac{2}{x} \quad Q = \frac{1}{x^3}$$

$$I = \int P dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2\ln x$$

$$e^I = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$y = x^2 \int \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2} dx + cx^2$$

$$y = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{4x^4} \right) + cx^2$$

$$y = -\frac{1}{4x^2} + cx^2$$

דוגמה 2:

$$xy' + (1+x)y = e^x \quad / x$$

$$y' + \frac{1+x}{x} y = \frac{e^x}{x}$$

$$P(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$Q(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$I = \int P dx = \int \frac{1+x}{x} dx = \ln x + x$$

והפתרון

$$y = e^{-I} \int Q(x) e^I dx + ce^{-I}$$

$$e^I = e^{\ln x + x} = xe^x$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x} \int \frac{e^x}{x} xe^x dx + \frac{c}{x} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x} \int e^{2x} dx + \frac{c}{x} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{2x} \cdot e^{2x} + \frac{c}{x} e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{x} \left(\frac{e^x}{2} + ce^{-x} \right)$$