36. משוואות מדויקות

המשואה:

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad (36.1)$$

נקראת מדויקת אם ורק אם קיים $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

לדוגמה $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$

היא משואה מדויקת כי

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ניתן לכתוב המשואה המדויקת הנ״ל בצורה הבאה

$$x^2 dx + y^2 dy - (ydx + xdy) = 0$$

או

$$x^2 dx + y^2 dy - d(xy) = 0$$

ועתה ניתן לבצע אינטגרציה אבר אבר ונקבל הפתרון:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - xy = C$$

דרך אחרת לפתור משואה מדויקת היא: נניח $\mu(x,y) = C$. הנחה זו מתבססת על העובדה שאם המשואה מדוייקת ניתן לזהות אגף ימין של המשואה עם $d\mu = 0$, כלומר $d\mu$ הוא דיפרנציאל שלם של $\mu(x,y)$ שהיא פונקציה קבועה.

פתרון:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

ואז נוכל לזהות

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}dx = M(x,y)dx$$

ואיזו

$$\mu(x,y) = \int^x M(x,y)dx + \phi(y)$$

כאשר $\int^x$ מציין אנטרל על x כאשר y קבוע. ואולם

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int^x M(x,y)dx\right\} + \frac{d\phi}{dy} = N(x,y)$$

וכך ניתן למצא $\frac{d\phi}{dy}$ ומתוך זה את $\phi(y)$.

דוגמאות:

פתור $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

מתקיים $\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$ כלומר המשואה מדויקת נוכל לפתור ב 2 דרכים:

א. נכנס בצורה הבאה:

$$2x^3 dx + ydy - dy + 3(ydx + xdy) = 0$$

או

$$2x^3dx + ydy - dy + 3d(xy) = 0$$

ע"י אינטגרציה נקבל

$$\frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} - y + 3xy = C$$

ב.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 2x^3 + 3y$$

$$\mu = \int^x (2x^3 + 3y)dx + \phi(y) = \frac{1}{2}x^4 + 3yx + \phi(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x + \phi'(y) = 3x + y - 1$$

$$\phi'(y) = y - 1$$

$$\phi(y) = \int (y-1)dy = \frac{y^2}{2} - y + C$$

ואז הפתרון

$$\mu(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + 3yx + \frac{y^2}{2} - y = C$$

דוגמה 2

פתור

$$(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 12x^3y^2 - 2x$$

מכאן המשואה המדויקת ניתנת לכתיבה:

$$4x^3y^3dx + 3x^4y^2dy - 2xydx - x^2dy = 0$$

$$d(x^4y^3) - d(x^2y) = 0$$

והפתרון:

$$x^4y^3 - x^2y = C$$

דרך ב'

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 4x^3y^3 - 2xy$$

$$\mu = x^4y^3 - x^2y + \phi(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x^4y^2 - x^2 + \phi'(y) = 3x^4y^2 - x^2$$

$$\phi'(y) = 0$$

$$\phi(y) = C$$

$$\mu(x,y) = x^4y^3 - x^2y = C$$

דוגמה 3
פתור

$$(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y + \cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x - \sin y$$

כלומר המשוואה מדויקת

$$(\cos y dx - x\sin y dy) + (y\cos x dx + \sin x dy) = 0$$

קל לראות:

$$d(x\cos y) + d(y\sin x) = 0$$

והפתרון:

$$x\cos y + y\sin x = C$$

דרך ב'

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \cos y + y\cos x$$

$$\mu = x\cos y + y\sin x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -x\sin y + \sin x + \phi'(y) = \sin x - x\sin y$$

$$\phi'(y) = 0$$

$$\phi(y) = C$$

ואז הפתרון

$$x\cos y + y\sin x = C$$

<u>36.1 גורם אינטגרציה</u>

אם המשוואה (36.2) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ אינה מדויקת מחפשים גורם אינטגרציה בו מכפילים את המשוואה כולה ומקבלים משוואה מדוייקת.

<u>כללים</u> לגורם אינטגרציה:

א. אם $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ פונקציה של x בלבד

אזי $e^{\int f(x)dx}$ גורם אינטגרציה של (36.2).

ב. אם $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$ פונקציה של y בלבד

$$e^{\int g(y)dy} = e^{-\int \frac{4}{y}dy} = e^{-4\ln y} = y^{-4}$$

הינו גורם האנטגרציה לכן ע"י הכפלת המשואה בגורם זה נקבל משואה מדויקת:

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = 0$$

ואמנם

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$

ולכן

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}$$
$$\mu = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \phi(y)$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^3} + \phi'(y) = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^3}$$
$$\phi'(y) = 0$$
$$\phi(y) = C$$

ואז נקבל הפתרון:

$$\mu(x,y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$$