

37. דוגמאות שימושיות למשוואות ממעלה ראשונה וסדר ראשון.

1) אוכלוסית ארץ גדלה פי 2 ב-50 שנה. בכמה שנים תגדל פי 3 אם מניחים שקצב הגדול פרופורציוני למספר התושבים.

נסמן ב- y את האוכלוסיה בזמן t (שנים) וב- y_0 את האוכלוסיה בזמן $t = 0$. מתוך ההנחה:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

או

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

נבצע אינטגרציה

$$\ln y = kt + C'$$

$$y = Ce^{kt}$$

כאשר $y = y_0$ $t = 0$ ולכן

$$y = y_0 e^{kt}$$

כאשר $y = 2y_0$ $t = 50$ ולכן נקבל

$$2y_0 = y_0 e^{50k} \Rightarrow e^{50k} = 2$$

כאשר $y = 3y_0$ נקבל

$$3y_0 = y_0 e^{kt} = y_0 (e^k)^t = y_0 \left(2^{\frac{1}{50}}\right)^t$$

79 שנים

ומכאן

$$3^{50} = 2^t \Rightarrow t \cong$$

2) לפי חק הקרור של ניוטון, קצב התקררות של חומר, הנמצא באויר נע, פרופורציוני להפרש בין טמפרטורת החומר וטמפרטורת האויר.

אם טמפרטורת האויר $30^\circ C$ וידוע שהחומר מתקרר מ- $100^\circ C$ ל- $70^\circ C$ במשך 15 דקות, מצא מתי טמפרטורת החומר תהיה $40^\circ C$?
תהיה T טמפרטורה החומר בזמן t . אזי מתקיים

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30^\circ)$$

או

$$\frac{dT}{T - 30} = -kdt$$

$$\ln(T - 30) = -kt + C$$

$$T - 30 = Ce^{-kt}$$

נניח

$$T = 100 \quad t = 0$$

$$T = 70 \quad t = 15$$

$$100 - 30 = C = 70$$

$$70 - 30 = 70e^{-k \cdot 15}$$

$$\frac{40}{70} = e^{-15k} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{40}{70}}{-15}$$

נחשב עבור כמה זמן t תהיה הטמפרטורה 40° .

$$40 - 30 = 70e^{-kt}$$

$$\frac{10}{70} = e^{\frac{t}{15} \ln \frac{40}{70}} = \left(\frac{40}{70}\right)^{\frac{t}{15}}$$

$$t = \frac{15 \ln 7}{-\ln 4 + \ln 7} \cong 52 \text{ (דקות)}$$

3) גוררים מסה של 80 ק"ג על קרח, נניח שהחכוך זניח. וההתנגדות הנוצרת כתוצאה

מחכוך עם אוויר שווה ל-5v. כאשר v מהירות ב-מ'שנייה.

א. מהו הכוח הקבוע שיקנה לגוף מהירות 10 מ'שנייה.

ב. מהי המהירות והמרחק כעבור 16 שניות.

לפי החק השני של ניוטון

$$ma = F - 5v$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - 5v$$

$$\frac{dv}{F - 5v} = \frac{dt}{m}$$

$$-\frac{1}{5} \ln F - 5v = \frac{t}{m} + C'$$

$$F - 5v = Ce^{-5t/m}$$

$$\text{כאשר } t = 0 \text{ ו-} v = 0 \text{ ואז } C = F$$

$$F - 5v = Fe^{-5t/m}$$

א. יש להקנות לגוף מהירות של 10 מ'שנייה ב $t \rightarrow \infty$ $v = 10$ מ'שנייה ולכן

$$F = 5v = 50$$

ב. המהירות כעבור 16 שניות:

$$50 - 5v = 50e^{-\frac{5 \cdot 16}{80}} = 50e^{-1}$$

$$5v = 50 - \frac{50}{e}$$

$$v = 10 \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$v = F \left(1 - e^{-5t/m}\right)$$

המרחק כעבור 16 שניות:

$$s = \int_0^{16} v dt = \frac{F}{5} \int_0^{16} \left(1 - e^{-5t/m}\right) dt = \frac{F}{5} \cdot \left(t + \frac{m}{5} e^{-5t/m}\right) = 10(16 + 16e^{-1} - 16) = 50 \cdot 16e^{-1}$$