4. הגבול של פונקציה

בפרק זה נדון במה שקורה לפונקציה $y = f(x)$ כאשר המשתנה הבלתי תלוי x שואף לגבול מסוים a או ל-∞. נתבונן בפונקציה $y = 3x - 2$. נבדוק כיצד תתנהג הפונקציה כאשר x יקבל ערכים השואפים ל-2. x יכול לשאוף ל-2 בדרכים שונות, לאינסוף. נתבונן למשל בסדרת המספרים הבאה שגבולה 2:
$$3, 2\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{4}, 2\tfrac{1}{8}, 2\tfrac{1}{16}, 2\tfrac{1}{32} \ \ldots$$
הערכים המתאימים לפונקציה $y = 3x - 2$ הם: $\ldots\ 7, 5\tfrac{1}{2}, 4\tfrac{3}{4}, 4\tfrac{3}{16}, 4\tfrac{3}{32}$.

ניתן אפוא לצפות שהפונקציה $y = 3x - 2$ שואפת ל-4 כש-x שואף ל-2. נבדוק מה יקרה אם x ישאף ל-2 בדרך אחרת. האם הגבול ישתנה? למשל, x יכול לקבל את הערכים הבאים $1, 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999\ldots$

הערכים המתאימים לפונקציה $y = 3x - 2$ הם: $1, 3.7, 3.97, 3.997, 3.9997, \ldots$

רואים שגם כאן הפונקציה שואפת ל-4.

אם הפונקציה שואפת לאותו גבול **בכל דרך** שבה x שואף ל-2, אנו נאמר שזהו גבול הפונקציה (כלומר, אם הגבול של x הוא 2 (x שואף ל-2) אזי גבול הפונקציה הוא 4) ונכתוב זאת $\lim\limits_{x\to 2} 3x - 2 = 4$. בסעיף הבא נביא הגדרה מתמטית לגבול.

4.1 הגדרת הגבול:

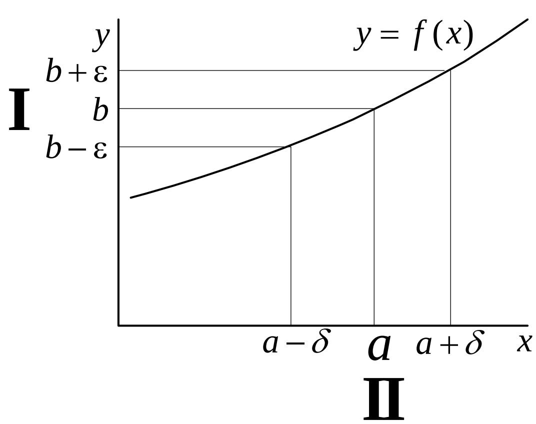
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ אם לכל מספר חיובי ε, קטן כרצוננו, קיים $\delta > 0$ כך שלכל x **(שונה מ-a)** המקיים את אי-השוויון $|x-a| < \delta$ מתקיים גם $|f(x) - b| < \varepsilon$.

הערות:

1. כאשר אנו מעוניינים בגבול אנו דנים בערכים של הפונקציה **בסביבת** נקודה a שהם **שונים** מ-a!
2. כדי שלפונקציה יהיה גבול כאשר $x \to a$ אין זה הכרחי שהפונקציה תהיה מוגדרת בנקודה $x = a$.
3. שים לב כי $x \to a$ בכל דרך שהיא - כלומר בכל סדרה שנבחר.

על מנת להסביר את ההגדרה נתבונן בגרף של הפונקציה $y = f(x)$. אנו אומרים כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ כאשר לכל $\varepsilon > 0$ שנבחר קטן כרצוננו נוכל למצוא δ כך שכל x הנמצא ברווח $|x-a| < \delta$ (ראה איור 3.3) קיים $|f(x) - b| < \varepsilon$. ואמנם לכל x ברווח הנ״ל הפונקציה נמצאת ברווח $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, לכן b הוא גבול הפונקציה.

העיקר בהגדרה זו שאחרי בחירה של ε (אינטרוול I) ניתן למצוא $\delta > 0$ הקובע את אינטרוול II כך שכאשר $x \neq a$ ונמצא באינטרוול II, $f(x)$ נמצא באינטרוול I.



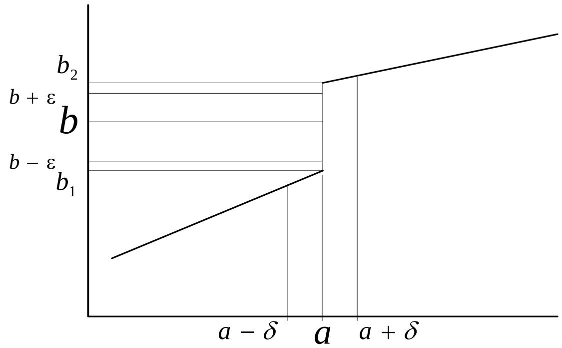
איור 4.1: הגדרת הגבול

4.2 דוגמאות לנקודות בהן אין גבול לפונקציה

דוגמה 1:

אם ניקח למשל את הפונקציה שבאיור 4.2, ניתן לראות כי כאשר מתקרבים לנקודה a משמאל (בערכים גדלים והולכים), שואף ערך הפונקציה לערך b_1, ואילו כאשר מתקרבים לנקודה a מימין (בערכים קטנים והולכים), שואף ערך הפונקציה לערך b_2 - ולכן אין גבול לפונקציה בנקודה a.

או: אם נבחר ε כמו באיור, לא נוכל למצוא $\delta > 0$ שעבור כל ערכי x המקיימים $|x-a| < \delta$ מתקיים גם $|f(x)-b| < \varepsilon$. (ראה איור 4.2)



איור 4.2

דוגמה 2: נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x^2 - 1 & x < 2 \end{cases}$$

לפונקציה זו אין גבול! כאשר מתקרבים ל-2 משמאל, הפונקציה מתקרבת ל- 3. אולם כאשר מתקרבים ל-2 מימין, הפונקציה מתקרבת ל- 4.

4.3 דוגמאות להוכחות גבול ע"פי הגדרה

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$. נוכיח כי $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ וקטן כרצוננו נוכל למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $|x-2| < \delta$ מתקיים $|x^2-4| < \varepsilon$. נניח $\delta < 1$:

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < \delta|x+2| < 5\delta$$

אם נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ נקבל שלכל $|x-2| < \delta$ מתקיים $|x^2-4| < \varepsilon$. כלומר - הוכחנו את הטענה! זוהי שיטה של הוכחת הגבול עפ"י ההגדרה.

השיטות המעשיות למציאת הגבול שונות ונעזרות במשפטים הבאים:

4.4 משפטי גבול

אם $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ו- $\lim_{x\to a} g(x) = B$ אזי:

כאשר k קבוע:

$$\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

בתנאי ש- $B \neq 0$! אם $B = 0$ ו- $A \neq 0$ הפונקציה שואפת ל-∞!

$$\lim_{x\to a}(f(x))^m = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^m = A^m$$

בתנאי ש- A^m מספר ממשי.

שים לב כי המצבים $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty; 0$ אינם מוגדרים!

נוכיח רק את המשפט השני. שאר ההוכחות ניתן למצוא בספרות שהובאה במבוא.
עלינו להוכיח שעבור כל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $|x-a| < \delta$ יתקיים אי השוויון $|f(x)+g(x)-(A+B)| < \varepsilon$. במקרה זה $A+B$ יהיה גבול של $f(x)+g(x)$.
נחשב: $|f(x)+g(x)-(A+B)| = |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \le \ldots$
ועפ״י משפט הערך המוחלט, ערך מוחלט של סכום הוא קטן או שווה לסכום הערכים המוחלטים.
ולכן: $\ldots \le |f(x)-A| + |g(x)-B|$
אבל לפי הנתון, לכל ε שנבחר (למשל $\frac{\varepsilon}{2}$) קיים δ_1 כך שעבור כל $|x-a| < \delta_1$ יהיה $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
וכמו כן, קיים δ_2 כך שעבור כל $|x-a| < \delta_2$ יהיה $|g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
ואם נבחר δ שיהיה הקטן מבין δ_1 ו- δ_2 נקבל שעבור $|x-a| < \delta$ מתקיים גם -
$|f(x)+g(x)-(A+B)| \le |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ - **מ.ש.ל.**

4.5 שימושים במשפטי גבול

ניעזר עתה במשפטים שלמדנו על מנת למצוא את הגבולות באופן מעשי. דוגמאות:

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 2x + 7 = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2}(-2x) + \lim_{x\to 2} 7 =$$
$$\left(\lim_{x\to2} x\right)\left(\lim_{x\to2} x\right) + \left(\lim_{x\to2}(-2)\right)\left(\lim_{x\to2} x\right) + \lim_{x\to2} 7 = 2\cdot2 + (-2)\cdot 2 + 7 = 7$$

שכן לפי ההגדרה $x \to 2$ משמעותו $\lim_{x\to2} x = 2$. באופן מעשי נהוג להשמיט את שלבי הביניים:

$$\lim_{x\to4}\sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to4}\left(25-x^2\right)} = \sqrt{9} = 3$$

אנו משתמשים כאן בגבול של משתנה
על מנת למצוא גבול של פונקציה

הערה: אסור להניח שתמיד $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. כפי שהוגדר לעיל, כאשר $x \to a$, x לעולם אינו שווה ל-a. x מתקרב יותר ויותר אך אינו שווה ל-a! לדוגמה: לפונקציה $y=\sqrt{25-x^2}$ אין גבול כאשר $x \to 5$, כי מימין הפונקציה לא מוגדרת ולא ניתן לומר שבכל דרך שבה $x \to 5$ הפונקציה שואפת לאפס.

4.6 המצב של 0/0

לעתים קורה שמקבלים גבול של מנה שגבול המונה הוא אפס וכן גם גבול המכנה אפס וגודל זה $\dfrac{0}{0}$ איננו מוגדר. אולם ישנה שיטה איך לחשב גבולות כאלו.

דוגמה 1:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-x-12}$$

אם נחשב גבול המונה וגבול המכנה נקבל $\frac{0}{0}$ שאינו מוגדר. אולם:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x\to4}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

מותר לחלק ב- $x-4$ לפני המעבר לביצוע הגבול היות ולפי ההגדרה כאשר $x \to 4$ קיים $x \ne 4$ ולכן $x-4$ איננו אפס.

דוגמה 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

להלן טבלה המסבירה את הדוגמה האחרונה:

x	x^2	x^2-1	$\frac{x^2-1}{x-1}$
1.1	1.21	0.21	2.1
1.01	1.0201	0.0201	2.01
1.001	1.002001	0.002001	2.001

ניתן לכתוב את הדוגמה האחרונה בצורה $0.\infty$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(x^2-1\right)$$

ונקבל בתשובה שהגבול הוא מספר סופי 2. הצורה $0.\infty$ יכולה להיות גם אפס או אינסוף כמו בדוגמאות הבאות:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(x^2-1\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2=0$$

תלוי מה שואף יותר מהר הפונקציה ל- ∞ או הפונקציה לאפס.

4.7 שאיפת פונקציה לאינסוף

הפונקציה $f(x)$ שואפת ל-∞ כאשר $x\to a$ (או $x\to\infty$) אם כאשר x מתקרב ל-a (בלי לקבל את הערך a) תהיה $f(x)$ החל ממקום מסוים גדולה מכל מספר חיובי נתון (או קטנה מכל מספר שלילי נתון).

לדוגמה:

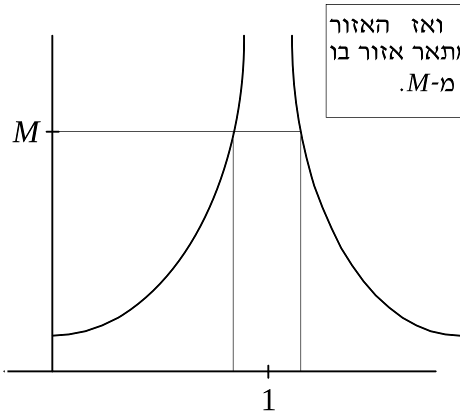
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

בכל סידרה ש-x יתקרב ל1-, הערך של $\frac{1}{(x-1)^2}$ יהיה החל ממקום מסוים גדול מכל מספר חיובי גדול שנבחר.

כמו כן,

$$\lim_{x\to 1}\left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right]=-\infty$$

נבחר את M, ואז האזור המסומן ע״י { מתאר אזור בו הפונקציה גדולה מ-M.



איור 4.3

חשוב לציין כי הציון ∞ **אינו** מספר השייך לממשיים. זהו סימן המציין התנהגות של פונקציה. במקרה זה גם **לא קיים** גבול, אף על פי שמציינים $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

המשפטים שהבאנו בסעיף 4.4 אינם נכונים אם $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$! הם נכונים רק במקרה שקיימים גבולות סופיים ל- $f(x)$ ו- $g(x)$.

דוגמה נוספת:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

ישנם מקרים שבהם $x \to \infty$ והפונקציה שואפת לגבול סופי. למשל $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.

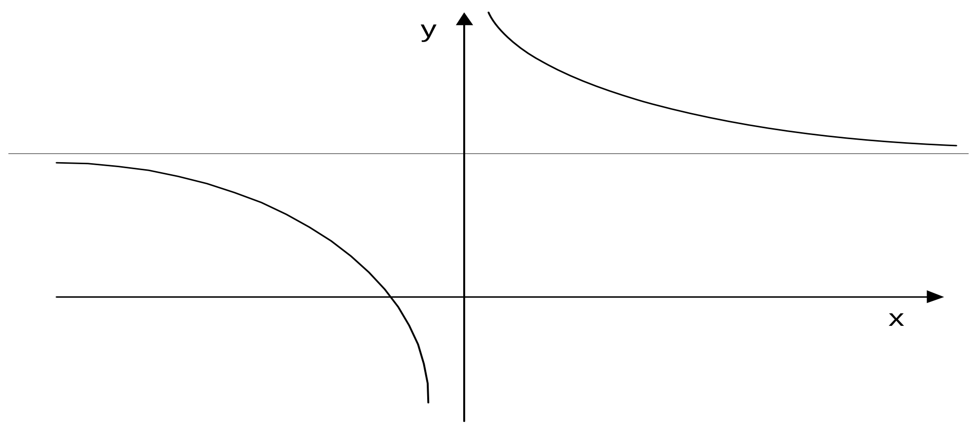
עלינו להוכיח שעבור ε שנבחר מתקיים אי השוויון $\left|\frac{1}{x}-0\right| < \varepsilon$.

ואמנם, תמיד נוכל למצוא x מספיק גדול כך שכל ה-x אחריו יקיימו $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ עבור ε קטן כרצוננו. כל שעלינו לעשות הוא לפתור את אי-השוויון $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. המקרה $\frac{\infty}{\infty}$.

דוגמאות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$$

תאור גרפי של הפונקציה הנ"ל:



איור 4.4

אילו היינו פותרים רגיל היינו מקבלים $\frac{\infty}{\infty}$ שזהו גודל בלתי מוגדר.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-5}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{7-5/x}{2+3/x} = \frac{7-0}{2+0} = 3\tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5}{x^3+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

כלומר $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ אם $\lim f(x) = 0$ ו- $\lim g(x) \neq 0$, ואילו $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ אם $\lim f(x) \neq 0$ ו- $\lim g(x) = 0$.

דוגמה למצב בו אין גבול:

$\lim_{x\to\infty}\sin x$ בכל סדרה עלולים לקבל תוצאה שונה, וזה נובע מצורת הפונקציה

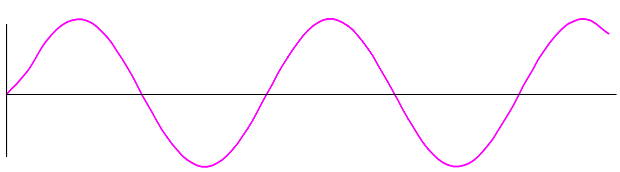
אין גבול לפונקציה y=sin$x$:

למשל, עבור הסידרה

$x_n = n\pi$ נקבל $y_n \to 0$

עבור הסידרה

$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ נקבל $y_n \to (-1)^n$



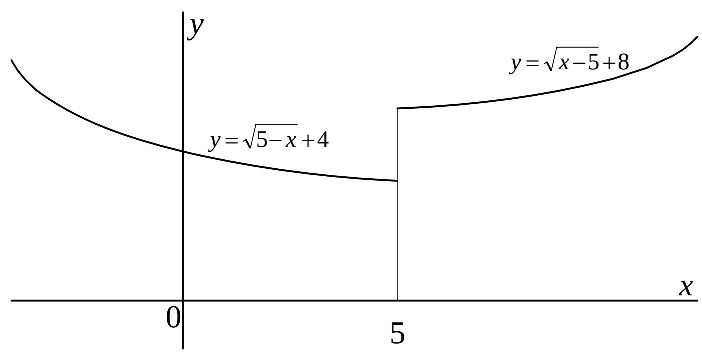
איור 4.5

4.8 גבול ימני וגבול שמאלי

דוגמה למקרה בו אין גבול: $\lim_{x\to 5}\sqrt{25-x^2}$. לפי הגדרת הגבול **בכל סדרה** בה $x \to 5$ צריכה הפונקציה לשאוף לאותו גבול. במקרה זה, אם השאיפה ל-5 באה ממספרים גדולים מ-5, למשל דרך הסדרה $\dots\ 5\frac{1}{16},\ 5\frac{1}{8},\ 5\frac{1}{4},\ 5\frac{1}{2}$, אזי הפונקציה לא מוגדרת עבור x אלו (לא מספר ממשי) ולכן לא קיים גבול. במקרה זה אנו אומרים כי לפונקציה **קיים גבול שמאלי** (מספרים מתחת ל-5) **ולא קיים גבול ימני** (מספרים מעל 5) ולכן לפונקציה **אין גבול**. לפונקציה **יש גבול** אם יש לה **גבול ימני** וגם **גבול שמאלי** ושניהם שווים - **ולהפך**!

ישנם מקרים בהם יש לפונקציה גבול שמאלי **וגם** גבול ימני ושניהם אינם שווים.
למשל: לפונקציה (ראה איור 3.5)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5}+8, & x>5\\ \sqrt{5-x}+4, & x<5\end{cases}$$



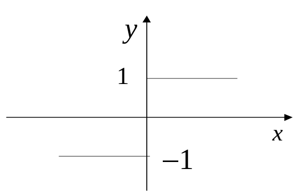
איור 4.6

יש גבול ימני, ויש גבול שמאלי בנקודה $x=5$, אך הם אינם שווים (הגבול הימני 8 והשמאלי 4) ולכן לפונקציה אין גבול. פונקציה כזו נקראת גם **פונקציה בלתי רציפה**. הגדרה מדויקת יותר ניתן בהמשך.

סימון:

גבול ימני: $\lim_{x\to 5^+} f(x)=8$

גבול שמאלי: $\lim_{x\to 5^-} f(x)=4$



איור 4.7

דוגמה נוספת: לפונקציה $y=\frac{x}{|x|}$ - אין גבול ב-0 (ראה איור 4.7).

גבול ימני הוא: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1$ גבול שמאלי הוא: $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1$

4.9 דוגמאות לחישוב גבולות בפונקציות טריגונומטריות.

תרגיל: הוכח כי $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$

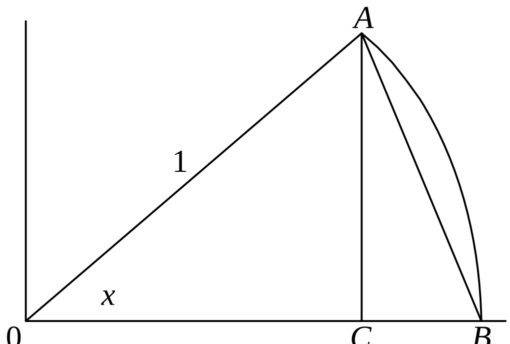
נניח כי $x>0$. אם נצייר זוית x כאשר $OA=1$ אזי $AC=\sin x$. אורך הקשת $\overset{\frown}{AB}$ שווה לגודל הזוית x

כיוון שהרדיוס (OA) שווה ל-1. ברור כי $\overset{\frown}{AB} > AB$ (אורך הקשת AB גדול מאורך הקטע AB) ו- $AB > AC$.

כלומר ש- $x > AB > AC$ ולכן $x > \sin x$.

לכן אם $x\to 0$ הרי ברור שגם $\sin x \to 0$.

כלומר ש- $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.



איור 4.8

באותו אופן ניתן להראות כי $\lim_{x\to 0}\tan x = x$.

נמצא את הגבול - $\lim_{x\to 0}\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\tfrac{x}{2}\right) = 1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\tfrac{x}{2} = 1-0 = 1$$

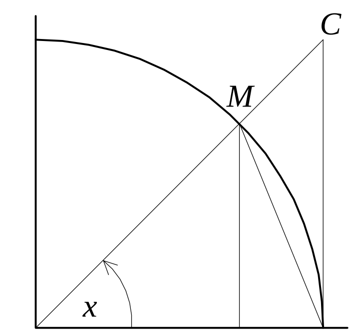
דרך אחרת:

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\lim_{x\to 0}\sin^2 x} = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

נמצא את הגבול - $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$ היות וגם המונה וגם המכנה של המונה מתאפסים. נוכל למצוא את גבול הפונקציה כאשר $x\to 0$.

נתאר מעגל יחידה. הזוית MOB היא הזוית x. ראה שרטוט:



איור 4.9

$$S_{\Delta AMO} < S_{\underset{\text{גזרה}}{\Delta AMO}} < S_{\Delta AOC}$$

$$S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2}OA\cdot MB = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$$

$$S_{\underset{\text{גזרה}}{\Delta AMO}} = \frac{1}{2}OA\cdot \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{1}{2}x$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}OA\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x \qquad\qquad x>0$$

$$\sin x < x < \tan x$$

כעת נחלק ב- $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

כלומר-

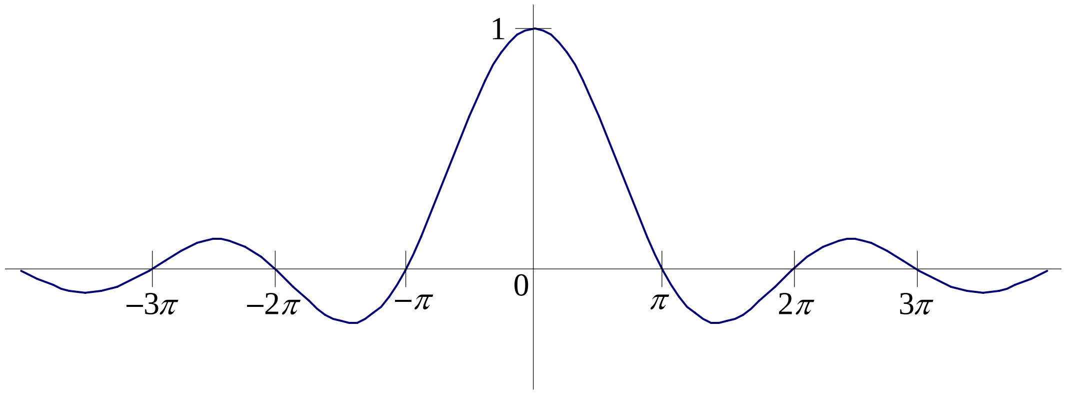
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

הערות:

א. הקשר בין אורך קשת לשטח גזרה: $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{L}{2\pi R} = \dfrac{s}{2\pi R^2}$ s- שטח הגיזרה; L- אורך הקשת

ב. **אם**: $a > b > c$ àæ $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c}$

אם x שואף לאפס אגף שמאל נשאר 1, אגף ימין שואף כפי שראינו ל-1 ולכן הביטוי האמצעי שביניהם חייב לשאוף גם הוא ל-1 - כלומר $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ואמנם, התיאור הגרפי של $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ נראה כך:



איור 4.10

נחשב $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}4\frac{\sin 4x}{4x}=4\lim_{4x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4$$

$$(x\to 0\Rightarrow 4x\to 0)$$

באופן כללי:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$$