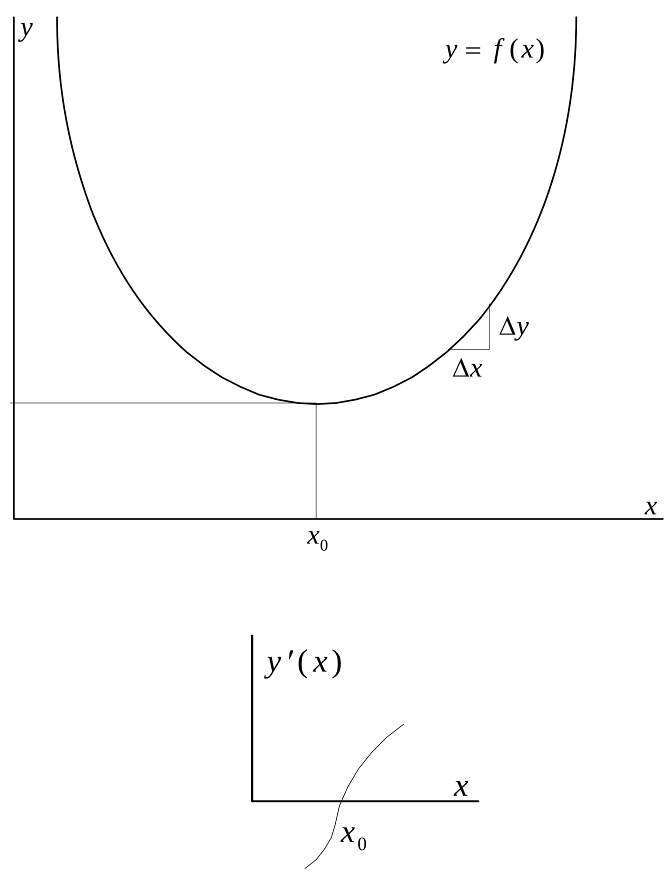
7. פונקציה עולה ויורדת נקודות קיצוניות.

7.1 פונקציה עולה ויורדת

נתונה הפונקציה $y = f(x)$. הפונקציה **עולה** בתחום שבו x גדל גם y גדל. הפונקציה **יורדת** בתחום שבו x גדל ו-y קטן. אם נתבונן בגרף, נוכל לראות שעבור $x > x_0$ הפונקציה עולה, ואילו עבור $x < x_0$ הפונקציה יורדת. אם מתקיים $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ הפונקציה עולה שכן Δx חיובי פירושו שגם Δy חיובי -$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) > 0$. אם $y' < 0$ הפונקציה יורדת, שכן Δx חיובי גורר אחריו Δy שלילי

-

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) < 0$. אפשר להסתכל גם מבחינת השיפוע. אם השיפוע חיובי ($\tan\vartheta > 0$) הפונקציה עולה, ואם השיפוע שלילי ($\tan\vartheta < 0$) אז הפונקציה יורדת.



איור 7.1: נקודת מינימום

7.2 מינימום ומכסימום- תנאי הכרחי.

אם נסתכל על הגרף באיור 7.1 ונשאל את עצמנו מהי הנגזרת בנקודה $x = x_0$ התשובה היא :

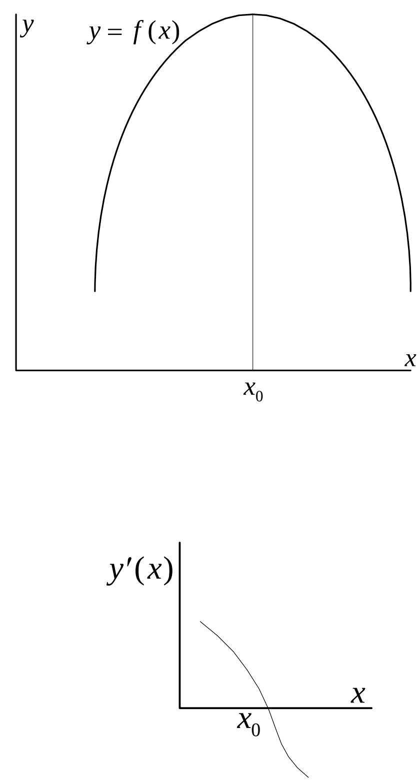
$f'(x_0) = 0$. בנקודה זו הנגזרת עוברת מערך שלילי לחיובי ולכן היא חייבת לעבור דרך האפס. או :

בנקודה זו, המשיק לפונקציה מקביל לציר ה-x.

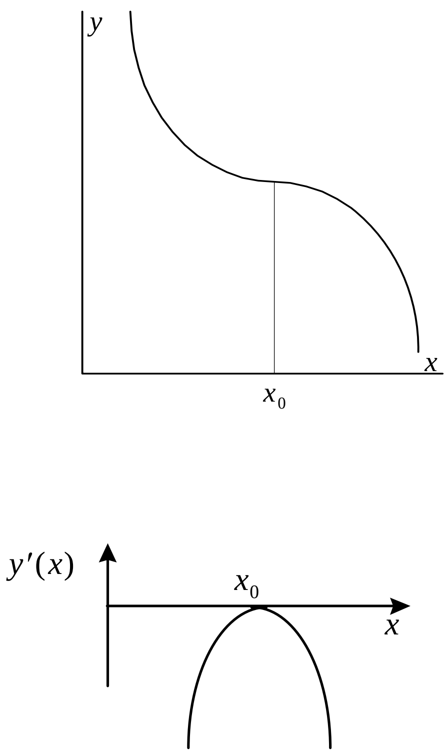
הנקודה $\left(x_0 , y_0\right)$ נקראת **נקודת מינימום**. בשרטוט הנראה באיור 7.2, $\left(x_0 , y_0\right)$ היא נקודת מקסימום, וגם בנקודה זו קיים $f'(x_0) = 0$.

ישנה עוד אפשרות אחת שבה הנגזרת שווה לאפס ($f'(x_0) = 0$). זהו המקרה שהפונקציה לא משנה את כיוונה מעליה לירידה או להפך, אבל השיפוע שלה ב-x_0 הוא אפס (ראה איור 7.3).

נקודה כזו נקראת **נקודת פיתול**. בנקודות בהן $f'\left(x\right) = 0$ יש נקודה קיצונית (מינימום או מקסימום) או נקודת פיתול.



איור 7.2 : נקודת מכסימום.



איור 7.3 : נקודת פיתול.

7.3 דוגמה למינימום ומכסימום.

נתבונן בדוגמה הבאה.

נתונה הפונקציה $a>0 \quad y=x^4-ax^2+b$

נמצא את נקודות ה-x שעבורן יש נקודות קיצוניות ונשרטט את הפונקציה.

אנו רואים את העובדות הבאות:

א. $f(x)=f(-x)$ - הפונקציה סימטרית (זוגית)

ב. עבור $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ הפונקציה שואפת ל-∞, כיוון ש- x^4 שולט והופך ל- ∞.

נבדוק מהן הנקודות הקיצוניות:

$$f'(x)=4x^3-2ax=2x\left(2x^2-a\right)$$

נקודות קיצוניות אפשריות כאשר:

א. $x=0$

ב. $x=\pm\frac{\sqrt{a}}{2}$

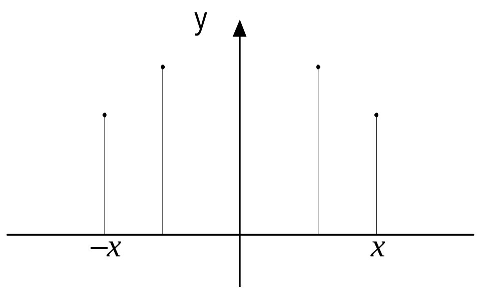
נחשב: $f(0)=b$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=\frac{a^2}{4}-a\frac{a}{2}+b=b-\frac{a^2}{4}.$$

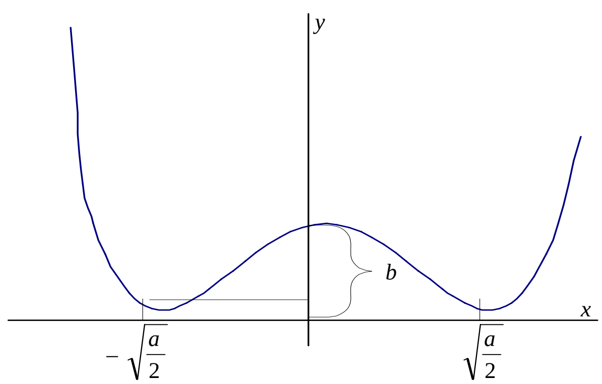
הפונקציה לא יכולה לרדת עבור $x>\sqrt{\frac{a}{2}}$ כי אז היה לה מינימום שם. נתונים אלו מספיקים כדי לצייר את הפונקציה ולקבוע מהם נקודות המינימום והמכסימום, ראה איור 7.5.

זה המצב כאשר $b>\frac{a^2}{4}$ ו- $b>0$. אם $b<\frac{a^2}{4}$ השרטוט ייראה כמו באיור 7.6.

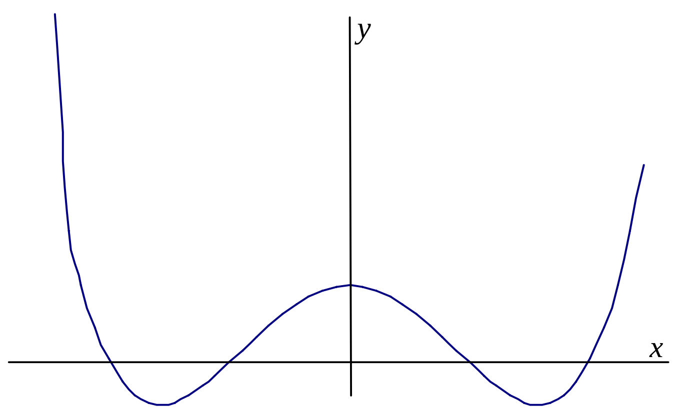
אם היה $a<0$ היינו מקבלים פתרון בודד עבור $f'(x)=0$, והוא $x=0$, והגרף היה נראה כך:



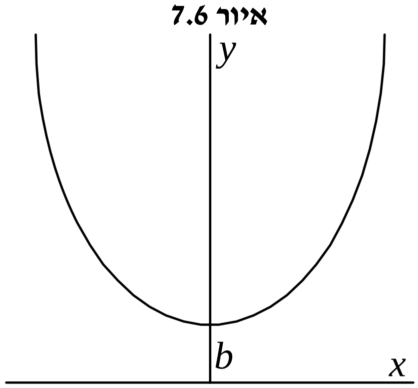
איור 7.4: פונקציה זוגית.



איור 7.5



איור 7.6



איור 7.7

<u>7.4 נקודות קיצוניות- תנאי מספיק.</u>

בנקודה x_0 שבה הנגזרת הראשונה מתאפסת, $f'(x_0)=0$, עדיין איננו יודעים אם לפונקציה יש בנקודה זו מקסימום, מינימום או נקודת פיתול. מהם הקריטריונים לדעת מה טיבה של הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ או מהם התנאים המספיקים.

משפט:

אם $f'(x_0)=0$ ו- $f''(x_0)>0$ יש לפונקציה נקודת מינימום ב- $x=x_0$.

אם $f'(x_0)=0$ ו- $f''(x_0)<0$ יש לפונקציה נקודת מקסימום ב- $x=x_0$.

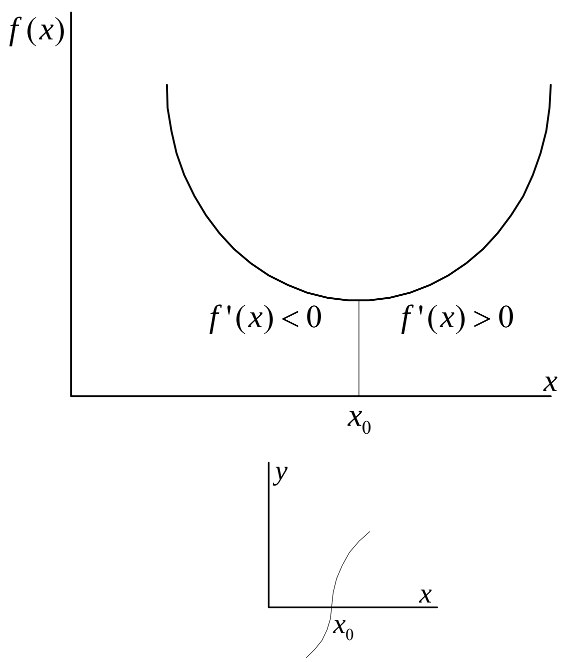
אם $f'(x_0)=0$ ו- $f''(x_0)=0$ המצב לא נקבע, תיתכן נקודת מינימום, מכסימום או פיתול.

הוכחה:

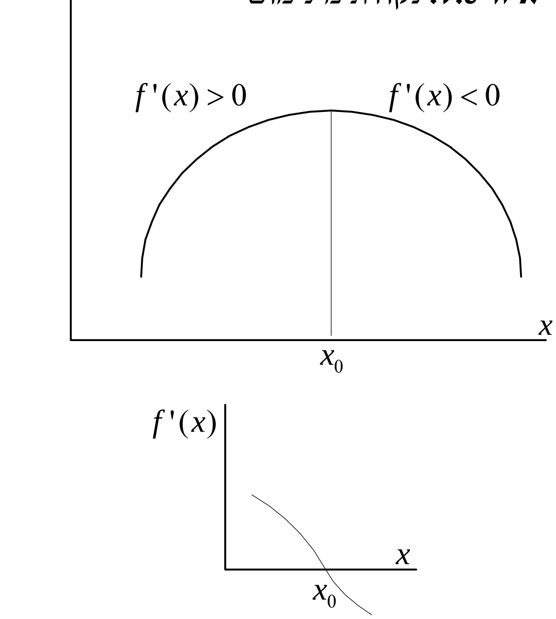
א. בנקודה x_0 , הנתונים $f'(x_0)=0$, ו- $f''(x_0)>0$ משמעותם שהפונקציה $f'(x)$ נמצאת בעליה, כלומר: עוברת מערך שלילי לערך חיובי דרך האפס, ולכן יש נקודת מינימום (איור 7.8)

ב. בנקודה x_0 , הנתונים $f'(x_0)=0$, ו- $f''(x_0)>0$ משמעותם שהפונקציה $f'(x)$ נמצאת בירידה, עוברת מערך חיובי לערך שלילי דרך האפס, ולכן יש נקודת מקסימום:

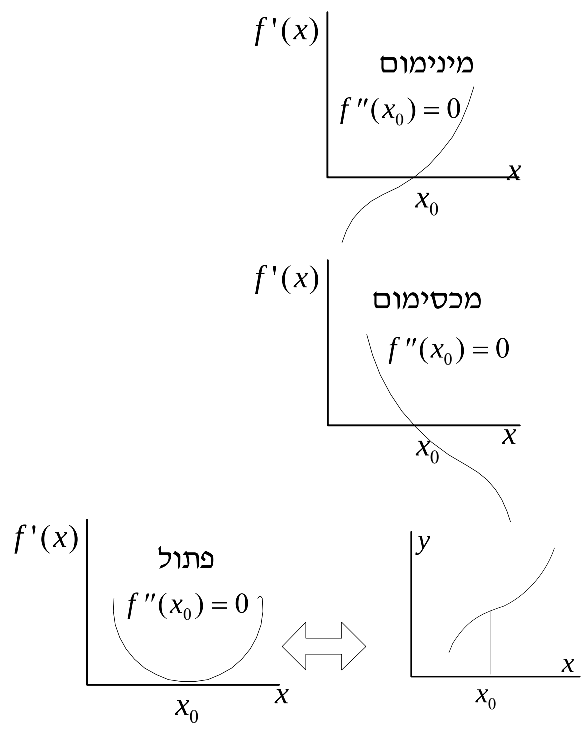
ג. אם $f'(x_0)=0$ ו- $f''(x_0)=0$, תיתכן נקודת מקסימום, מינימום או פיתול. נוכל לראות זאת **בדוגמאות הבאות**:



איור 7.8: נקודת מינימום



איור 7.9 : נקודת מכסימום



איור 7.10

במקרה זה נבדוק אם הנגזרת הראשונה משנה סימן בסביבות x_0 ולפי זה נקבע אם הנקודה מינימום, מכסימום או פיתול.
נחזור לדוגמה הקודמת בסעיף 7.3.

$a > 0$ $\quad y = x^4 - ax^2 + b \quad$ $y' = 4x^3 - 2ax = 0$

מקסימום $\quad y'' < 0 \quad x_1 = 0$

מינימום $\quad y'' = 12\frac{a}{2} - 2a > 0 \quad x_2 = \sqrt{\frac{a}{2}}$ $\quad\quad y'' = 12x^2 - 2a$

מינימום $\quad y'' > 0 \quad x_3 = -\sqrt{\frac{a}{2}}$

אם a שלילי, מקבלים רק נקודת מינימום ב-$x = 0$.

דוגמה

$$y = (x-1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2 = 0$$

הנגזרת שווה לאפס עבור $x = 1$:

הנגזרת השניה אף היא אפס ב- $x = 1$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-1) = 0$$

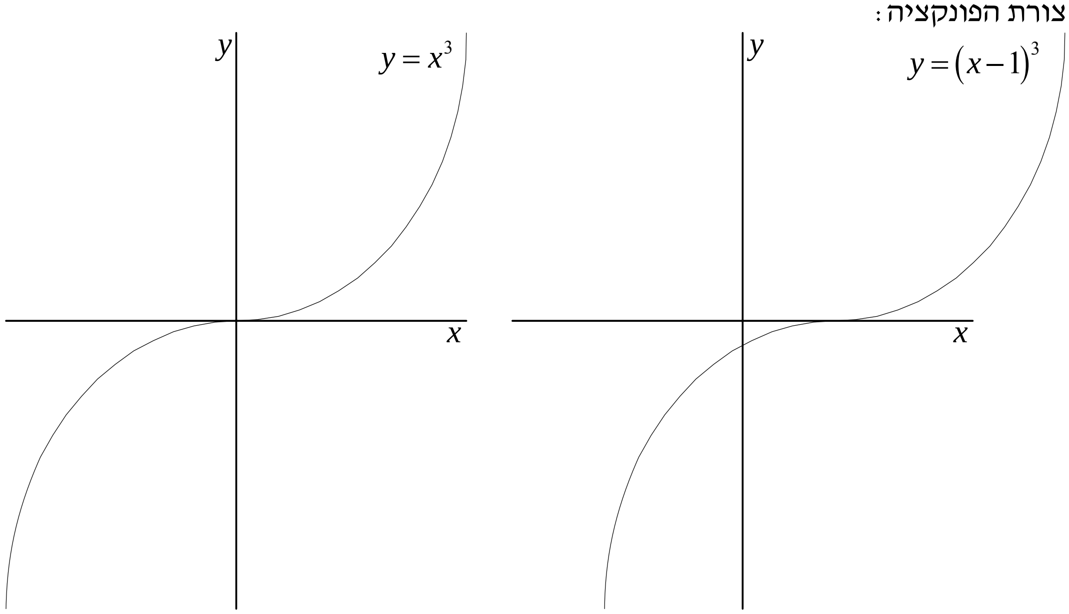
אם כן, גם הנגזרת הראשונה וגם הנגזרת השניה מתאפסות ב-$x = 1$.

נבדוק את הנגזרת הראשונה:

עבור $x < 1$ קיים $\frac{dy}{dx} > 0$ וגם עבור $x > 1$ קיים $\frac{dy}{dx} > 0$.

כלומר, הפונקציה לא משנה את כיוון השיפוע שלה ולכן אין מכסימום או מינימום אלא נקודת פיתול.

צורת הפונקציה:



איור 7.11

השיפוע חיובי והוא הולך וקטן עד לאפס, ואז שוב חוזר וגדל!

פונקציה זו דומה לפונקציה $y = x^3$ (ראה איור) אלא שהיא מוזזת ימינה ביחידה.

דוגמה נוספת $y = x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 = 0$$

הנגזרת שווה לאפס ב- $x = 0$.

נבדוק מהי הנגזרת השניה:

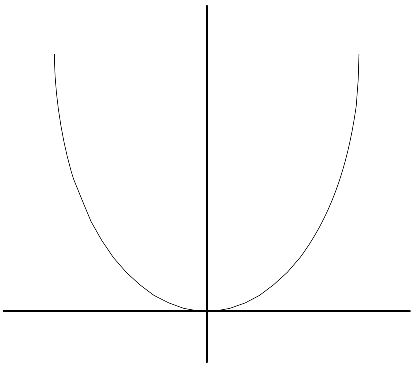
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 = 0$$

גם היא שווה לאפס ב- $x = 0$.

לכן נבדוקמה קורה לנגזרת בסביבות $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} \quad (x > 0) \quad > 0$$

$$\frac{dy}{dx} \quad (x < 0) \quad < 0$$



איור 7.12

הנגזרת הראשונה הופכת משלילית לחיובית ולכן יש כאן **נקודת מינימום**!

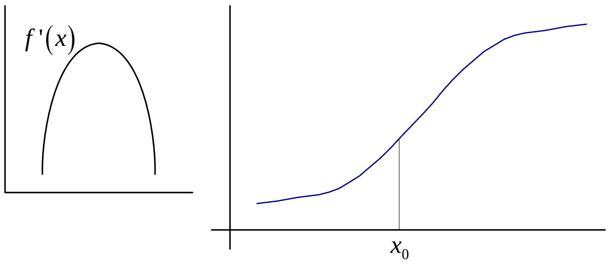
יתכן גם מקרה בו יש תמיד נקודת פיתול והוא:

$$f''(x_0) = 0 \quad f'(x_0) \neq 0$$

השיפוע הולך וגדל עד לערך מסוים ואחר-כך הולך וקטן נקודת המעבר נקראת נקודת פיתול.

במקרה זה הנגזרת הראשונה לא משנה סימן (ראה איור).

ואילו הנגזרת השניה משנה סימן. במקרה זה מסימן חיובי לשלילי (ראה איור 7.13).



איור 7.13

7.5 סיכום התנאים המספיקים וההכרחיים לנקודות מכסימום מינימום ופיתול

א. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$: אזי x_0 היא נקודת מינימום

ב. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) < 0$: אזי x_0 היא נקודת מכסימום

ג. אם $f'(x_0) \neq 0$ ו- $f''(x_0) = 0$: אזי x_0 היא נקודת פיתול

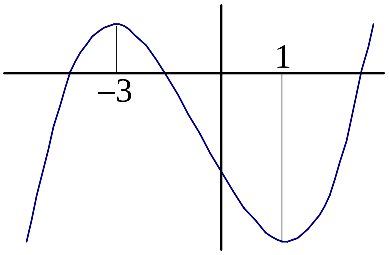
ד. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$: מצב לא ברור (יתכן מינימום, מכסימום ופיתול)

אם $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x > x_0}$ ו- $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x < x_0}$ הם בעלי סימנים הפוכים, יש מינימום או מכסימום.

ואם הם בעלי אותו סימן יש נקודת פיתול.

$\left.\frac{df}{dx}\right\|_{x > x_0}$	$\left.\frac{df}{dx}\right\|_{x < x_0}$	**סוג הנקודה**
+	−	מינימום
−	+	מכסימום
+	+	נקודת פיתול
−	−	נקודת פיתול

דוגמא:



איור 7.14

נתונה פונקציה: $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 22$

מצא נקודות מינימום, מכסימום ופיתול:

נגזרת:

נחשב את הנגזרת ונשווה לאפס: $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$

נחשב את הנגזרת השניה בנקודות אלו:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 6$$

נק׳ מכסימום	$x_1 = -3$	$y'' < 0$
נק׳ מינימום	$x_2 = 1$	$y'' > 0$

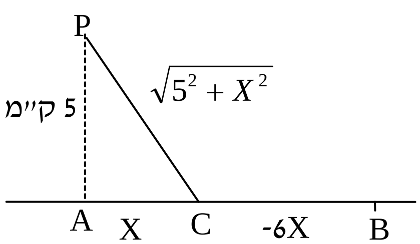
נבדוק האם יש נקודה בה הנגזרת השניה מתאפסת והראשונה לא.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 6 = 0$$

$$x = -1$$

בנקודה זו מתקיים ש- $\frac{dy}{dx} \neq 0$ ולכן זוהי נקודת פיתול. ואמנם השיפוע הולך וקטן עד לערך מסוים ושוב הולך וגדל. השיפוע משנה את מגמתו ולכן הנקודה $x = -1$ $\left(-1\,,-11\right)$ היא נקודת פיתול.

דוגמה שימושית לבעיות מינימום ומקסימום.



איור 7.15

אדם נמצא בסירה בנקודה P במרחק 5 ק״מ מנקודה A שנמצאת על החוף. הוא רוצה להגיע לנקודה B המרוחקת 6 ק״מ מנקודה A (לאורך החוף). אם הוא שט במהירות של 2 קמ״ש וצועד במהירות של 4 קמ״ש איפה עליו לרדת לחוף על מנת להגיע בזמן הקצר ביותר?

נניח שהוא ירד לחוף בנקודה C במרחק X מ-A, הזמן שלקח לו להגיע מ P ל B הוא:

$$t = \frac{\sqrt{5^2 + X^2}}{2} + \frac{6 - X}{4}$$

אותנו מענין מהו t המינימלי. כלומר עבור איזה X, t הוא מינימום. נחשב את הנגזרת $\frac{dt}{dx}$:

נחשב מתי הנגזרת מתאפסת.

$$\frac{dt}{dX} = \frac{2X}{4\sqrt{5^2 + X^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2X - \sqrt{5^2 + X^2}}{4\sqrt{5^2 + X^2}}$$

$$2X - \sqrt{5^2 + X^2} = 0$$

$$2X = \sqrt{5^2 + X^2}$$

$$4X^2 = 25 + X^2$$

$$3X^2 = 25$$

$$X = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2.89$$

נוכל לבדוק נגזרת שניה ולוודא שזו אכן נקודת מינימום. זה אומר שעליו לרדת לחוף בנקודה C המרוחקת 2.89 ק״מ מנקודה A לכיוון נקודה B.