9. חשבון אינטגרלי.

עד כה עסקנו בבעיות של מציאת הנגזרת של **פונקציה נתונה**. נשאלת השאלה בהינתן נגזרת האם נוכל למצוא את הפונקציה המקורית (הפונקציה שנגזרתה נתונה)?
זוהי שאלה קשה יותר, חשבון אינטגרלי דן בבעיה הזו. במקרים רבים התשובה תהיה פשוטה.
לדוגמא:

נתון $\frac{dy}{dx}=5x^4$ קל לראות ש $y=x^5$.

במקום לחפש פונקציה ש**הנגזרת** שלה נתונה אנו יכולים לחפש פונקציה ש**הדיפרנציאל** שלה נתון.

לדוגמא: נתון: $dy=5x^4dx$ ולכן $y=x^5$.

הסימון $\int 5x^4dx$ משמעותו מהי הפונקציה ש $5x^4dx$ הוא הדיפרנציאל שלה (כלומר $dy=5x^4dx$)

סימון זה נקרא אינטגרל. האינטגרל הוא אפוא הפעולה ההפוכה לפעולת חישוב הדיפרנציאל. כלומר :

$$d\left(x^2\right)=2xdx$$

$$\int 2xdx=x^2$$

$$d\left(\tan x\right)=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$$

נשאלת השאלה האם x^2 היא הפונקציה היחידה שהדיפרנציאל שלה הוא $2xdx$? התשובה היא לא!
לדוגמא: גם הפונקציה $y=x^2+5$ או באופן כללי יותר $y=x^2+C$ לכל C קבוע, הדיפרנציאל שלה $dy=2xdx$ לכן באופן כללי נכתוב $\int 2xdx=x^2+C$.

לסיכום:

בכתיבה $\int 2xdx$ אנו שואלים מהי הפונקציה שהנגזרת שלה היא $2x$ או מהי הפונקציה שהדיפרנציאל שלה הוא $2xdx$. התשובה היא x^2+C. לאינטגרל שאין לו תשובה חד ערכית אנו קוראים אינטגרל **בלתי מסוים**.

דוגמאות נוספות:

$$\int 2\cos 5xdx=\frac{2}{5}\sin 5x+C$$

כי הדיפרנציאל של $\frac{2}{5}\sin 5x$ הוא $2\cos 5xdx$ או הנגזרת של $\frac{2}{5}\sin 5x$ היא $2\cos 5x$.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$$

$$\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$$

עד כאן מצאנו ע״י ניחוש את הפונקציות, נלמד עתה לחשב אותן בדרך שיטתית.
נוכיח תחילה **משפט**:

אם $\int f(x)dx=F(x)$ וכן $\int f(x)dx=G(x)$ אזי $G(x)=F(x)+C$.

כלומר לא יתכן שלפונקציה אחת יהיו שני אינטגרלים שיתנו שתי פונקציות שונות מלבד שינוי בקבוע.
הוכחה:
לפי הגדרת האינטגרל

$$F'(x)=f(x)$$

$$G'(x)=f(x)$$

$$\left[G(x)-F(x)\right]'=G'(x)-F'(x)=0$$

כלומר
$$G(x)-F(x)=C$$
לכן פתרון של אינטגרל הוא פונקציה אחת עד כדי קבוע.

9.1 אינטגרלים מיידיים.

לא קל לחשב אינטגרל של דיפרנציאל נתון. אמנם ישנם דיפרנציאלים שאת האינטגרל שלהם נוכל לרשום מיד על סמך נוסחאות ידועות מחשבון דיפרנציאלי. אינטגרלים כאלו נקראים אינטגרלים מידיים.
האינטגרלים המיידיים:

1)
$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

שכן הנגזרת של אגף ימין נותנת x^n או הדיפרנציאל נותן $x^n dx$. נוסחה זו נכונה עבור כל n ממשי פרט למקרה $n=-1$. במקרה זה
$$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

שכן $\left(\ln x+C\right)'=\frac{1}{x}$.

דוגמאות:
$$\int\sqrt{x}dx=\int x^{1/2}dx=\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{3/2}+C$$
$$\int x\sqrt[3]{x}dx=\int x^{4/3}dx=\frac{7}{3}x^{7/3}+C$$

2)
$$\int\sin x dx=-\cos x+C$$

3)
$$\int\cos x dx=\sin x+C$$

4)
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$

5)
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$$

6)
$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

שכן
$$\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)'=\frac{a^x\ln a}{\ln a}=a^x$$
$$\int e^x dx=e^x+C$$

7)
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$$

8)
$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$$

אלו הן הנוסחאות העיקריות של האינטגרלים המיידיים. נוסיף מספר כללים פשוטים לחישוב אינטגרלים מסובכים יותר.

א. $$\int c\cdot f(x)dx = c\int f(x)dx$$

כלומר האינטגרל של קבוע כפול פונקציה שווה לקבוע כפול האינטגרל של הפונקציה.

ב. $$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

כלומר אינטגרל של סכום (או הפרש) של פונקציות שווה לסכום (או הפרש) של האינטגרלים.
קל מאד להוכיח את שני המשפטים האלו ולכן נוותר על הוכחתם.
נעבור אפוא לשיטות שונות לפתירת אינטגרלים. צריך להעיר כי בניגוד לנגזרות:
א) אין שיטה אחת לחישוב אינטגרלים.
ב) לא לכל פונקציה ניתן למצוא את האינטגרל שלה.

9.2 שיטת הצבה

נדון תחילה בשיטת הצבה המביאה לפונקציות מהצורה x^μ :

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

דוגמאות:

1)

$$\int\left(17x^4-6x^2+\frac{5}{x}\right)dx = 17\int x^4dx - 6\int x^2dx + 5\int\frac{1}{x}dx = \frac{17x^5}{5}-\frac{6x^3}{3}+5\ln x + C$$

2) נחשב $\int (x+2)^n dx$ קל לנחש כי התוצאה היא : $\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}+C$ עבור $n\neq -1$ ואילו

עבור $n=-1$

התוצאה היא $\ln(x+2)+C$.

אך במקום לנחש ניתן למצוא את התשובה ע"י שיטה הנקראת שיטת **הצבה** או **החלפת משתנים**:

נסמן $s=x+2$ ואז $ds=dx$ ונוכל לכתוב $\int (x+2)^n dx = \int s^n ds$

ואז לפי הנוסחה $= \frac{s^{n+1}}{n+1}+C = \frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}+C$

עבור $n\neq -1$.

כלומר ע"י החלפת משתנים קבלנו אינטגרל מידי, באופן כללי $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$

עבור $n\neq -1$.

3) חשב את האינטגרל

$$\int \left(2x^2+7\right)^2 x dx$$

גם כאן נוכל להגיע לצורה של אינטגרל מידי ע"י החלפת משתנים:

$s = 2x^2 + 7$

$ds=4xdx$ ונקבל:

$$\int \left(2x^2+7\right)^2 xdx = \tfrac{1}{4}\int s^2 ds = \tfrac{1}{4}\frac{s^3}{3} + C = \tfrac{1}{12}\left(2x^2+7\right)^3 + C$$

הערה: שים לב, את האינטגרל $\int \left(2x^2+7\right)^2 dx$ לא ניתן לפתור ע"י החלפת המשתנים שעשינו.

4) חשב את האינטגרל

$$\int \frac{x}{2x^2+7}dx = \tfrac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{4}\ln u + C = \tfrac{1}{4}\ln\left(2x^2+7\right) + C$$

שוב ע"י החלפת משתנים

$u = 2x^2 + 7$

$du = 4xdx$

5) חשב את האינטגרל

$$\int x^2\sqrt{x^3+3}dx =$$

אם נציב

$u = x^3 + 3$

$du = 3x^2 dx$

נקבל:

$$= \tfrac{1}{3}\int u^{1/2}du = \tfrac{1}{3}\frac{2u^{3/2}}{3} + C = \tfrac{2}{9}\left(x^3+3\right)^{3/2} + C$$

נשים לב כי x^2dx הוא הדיפרנציאל (עד כדי הכפלה הקבוע) של x^3+3 ולכן קיבלנו אינטגרל מידי ע"י החלפת משתנים.

בדוגמאות אלו נשים לב כי האינטגרל מורכב מ **חזקה של פונקציה** מוכפלת **בגורם פרופורציונלי לדיפרנציאל של הפונקציה** ולכן אנו מקבלים אינטגרלים מן הסוג $\int u^n du$

6) חשב את האינטגרל

$$\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}d\theta$$

החזקה של הפונקציה במקרה הזה היא $\left(1+\cos\theta\right)^{-1/2}$ והיא מוכפלת בגורם שהוא פרופורציונלי לדיפרנציאל.

שכן $d(1+\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$, ולכן ע״י החלפת משתנים נקבל:

$$U = 1+\cos\theta$$
$$dU = -\sin\theta\, \mathrm{d}\theta$$

$$\int d\theta\, \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^{1/2}} = -\int \frac{dU}{U^{1/2}} = -\int dUU^{-1/2} = -\frac{U^{1/2}}{1/2} + c = -2(1+\cos\theta)^{1/2} + c$$

גם כאן ללא $\sin\theta$ במונה לא היינו מצליחים לפתור בשיטה זו את הבעיה.

7) חשב:

$$\int \sin 2\theta \cos^5 2\theta\, \mathrm{d}\theta$$

זהו גם אנטגרל מטפוס של חזקה. יש לנו חזקה של פונקציה $\cos 2\theta$ המוכפלת בגודל $-2\sin 2\theta$ שזה פרופורציונלי לדיפרנציאל של $\cos 2\theta$.

כלומר אם נציב:

$$U = \cos 2\theta$$
$$dU = -2\sin 2\theta\, d\theta$$

נקבל:

$$= -\frac{1}{2}\int dUU^5 = -\frac{U^6}{2\cdot 6} + c = -\frac{U^6}{12} + c = -\frac{\cos^6 2\theta}{12} + c$$

8) חשב את האנטגרל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} =$$

אם נציב: $U = 2x+5$ אזי:

$$dx = \frac{dU}{2} \;\leftrightarrow\; \mathrm{dU} = 2\mathrm{dx}$$

נקבל:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dU}{U^{1/2}} = \frac{1}{2}\int U^{-1/2} dU = \frac{1}{2}\frac{U^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2x+5} + c$$

9) חשב את האנטגרל:

$$\int \frac{7xdx}{x^2+1} =$$

נציב:

$$x^2+1 = U$$
$$2xdx = dU$$

$$xdx=\frac{dU}{2}$$

$$=\int\frac{7\cdot\frac{1}{2}dU}{U}=\frac{7}{2}\int\frac{dU}{U}=\frac{7}{2}\ln U+c=\frac{7}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c$$

10) חשב את האנטגרל

$$\int\frac{e^{tx}dx}{e^{tx}+1}=$$

$$e^{tx}+1=U$$

$$te^{tx}dx=dU$$

$$=\frac{1}{t}\int\frac{dU}{U}=\frac{1}{t}\ln U+c=\frac{1}{t}\ln\left(e^{tx}+1\right)+c$$

עד עתה הבאנו שיטות הצבה או החלפת משתנים באופן ישיר.

עתה נראה דוגמאות שמביאות אף הן לצורה x^m בעזרת הצבה אלא שקודם עלינו להביא האנטגרנד (הפונקציה שעליה מבצעים אנטגרל) לצורה שונה.

נדגים את הדבר:

1) חשב את האנטגרל

$$\int\frac{1}{e^x+1}dx$$

כאן אם נציב $e^x+1=U$ לא נקבל שהמונה $e^xdx=dU$ אבל אם נשנה את צורה הפונקציה נוכל להגיע לתוצאה של x^n. נכפיל במונה ובמכנה ב- e^{-x}

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

כלומר:

$$\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=$$

אם נציב עתה:

$$1+e^{-x}=U$$

נקבל:

$$-e^{-x}dx=dU$$

כלומר עכשיו חזקה של הפונקציה מוכפלת בדיפרנציאל שלה (עד כדי פרופורציה).

$$=-\int\frac{dU}{U}=-\ln U+c=-\ln(1+e^{-x})+c$$

2) חשב

$$\int dx\sin^3 x$$

אם נציב:

$$U=\sin x$$

נקבל:

$$dU=\cos xdx$$

כלומר אין לנו דפרנציאל מוכפל בחזקה של הפונקציה.

אולם נוכל לכתוב האנטגרנד בדרך הבאה :

$$\int dx \sin^3 x = \int dx \sin x(1-\cos^2 x)$$

ואם נציב :

$$U = \cos x$$
$$-\sin x dx = dU$$

נקבל :

$$= -\int dU(1-U^2) = -U + \frac{1}{3}U^3 + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

3) חשב :

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

אם נציב :

$$U = \cos x$$
$$dU = -\sin x dx$$

נקבל :

$$= -\int \frac{dU}{U} = -\ln U + c = -\ln \cos x + c$$

שים לב: אנו עוסקים בפונקציות טריגונומטריות ומצאנו אנטגרל של פונקציות אלו בלי צורך לדעת אנטגרלים של פונקציות טריגונומטריות !!!

4) חשב :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} =$$

אם נציב :

$$U = tg\frac{x}{2}$$
$$dU = \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{1}{U} dU = \ln U + c = \ln tg\frac{x}{2} + c$$

9.3 אנטגרלים של פונקציות טריגונומטריות.

ראינו את האנטגרלים המידיים:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

כ"כ ראינו:

$$\cos x = U$$
$$-\sin x dx = dU$$

$$= -\int \frac{dU}{U} = -\ln U + c = -\ln \cos x + c = \ln \sec x + c$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dU}{U} = \ln U + c = \ln \sin x + c$$

$$\sin x = U$$
$$\cos x dx = dU$$

נחשב עתה:

$$\int \sec x dx =$$

אם נכפיל האנטגרנד ב- $\frac{\sec x + tgx}{\sec x + tgx}$ נקבל:

$$= \int \frac{\sec^2 x + tgx \sec x}{tgx + \sec x}$$

אם נציב:

$$U = tgx + \sec x$$
$$dU = \left(\sec^2 x + tgx \sec x\right) dx$$

נקבל:

$$= \int \frac{dU}{U} = \ln U + c = \ln(tgx + \sec x) + c$$

באותו אופן:

$$\int dx \csc x = \int \frac{\csc^2 + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx =$$

$$U = \csc x + \cot x$$
$$dU = -\left(\csc x \cot x + \csc^2 x\right) dx$$

$$= -\int \frac{dU}{U} = -\ln(\csc x + \cot x) + c = -\ln\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + c = -\ln\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) + c =$$
$$= -\ln\left(\frac{2\sin^2 x/2}{2\sin x/2 \cos x/2}\right) + c = \ln\left(tg\frac{x}{2}\right) + c$$

תוצאה שקיבלנו קודם ! דבר זה מראה שאין שתי תשובות שונות לאותו אנטגרל, רק עד כדי קבוע (משפט שהוכחנו קודם).

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + c$$

בזאת סיימנו אנטגרלים של כל הפונקציות הטריגונומטריות האלמנטריות.

דוגמאות:

בדוגמאות הבאות נחפש הצבה שתביא אותנו לאנטגרלים של הפונקציות האלמנטריות.

1) חשב:

$$\int \sin(2x+7)dx =$$

$$U = 2x+7$$
$$dU = 2dx$$
$$\frac{dU}{2} = dx$$

$$= \int \sin U \frac{dU}{2} = \frac{1}{2}\int \sin U dU = -\frac{1}{2}\cos U + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+7) + c$$

2) חשב

$$\int \sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$U=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$$
$$dU=\frac{1}{2}dx$$

$$=2\int \sec^2 U dU = 2tgU + c = 2tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+c$$

3) חשב

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int dx(1+\cos 2x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int dx \cos 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{dU}{U}\cos U =$$

$$U=2x$$
$$dU=2dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin U + c = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x + c$$

כלומר ע״י הצבות פשוטות הצלחנו להביא לצורה של פונקציות אלמנטריות.

4) חשב:

$$\int dx\cdot x^2 \cot\left(x^3\right) =$$

אם נציב:

$$x^3 = U$$
$$3x^3 dx = dU$$
$$x^2 dx = \frac{dU}{3}$$

$$=\int \frac{dU}{3}\cot U = \frac{1}{3}\int dU \cot U = \frac{1}{3}\ln\cos U + c = \frac{1}{3}\ln\left(\cos(x^3)\right)+c$$

כלומר יש לנו באנטגרל cot של פונקציה כפול הדפרנציאל שלה (מוכפל בקבוע) ולכן בשיטת ההצבה מקבלים אנטגרל של cot בלבד.

5) חשב :

$$\int dx \frac{x}{\sin^2 x^2} =$$

אם נציב :

$$x^2 = U$$
$$2xdx = dU$$
$$xdx = \frac{dU}{2}$$

נקבל :

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -\frac{1}{2}ctgU + c = -\frac{1}{2}ctgx^2 + c$$

6) חשב :

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx =$$

לפי הנוסחה :

$$\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$$

נוכל לכתוב :

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x/2} = \int \frac{\mathrm{dU}}{\cos^2 U} = tgU + c = tg\, x/2 + c$$
$$\frac{x}{2} = U; \frac{dx}{2} = dU$$

7) חשב :

$$\int tg^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = tgx - x + c$$

9.4 אנטגרלים של פונקציות אקספוננציאליות.

הבאנו את האנטגרלים המיידים.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + a$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

דוגמאות:

1) חשב:

$$\int e^{2x} dx =$$

נציב:

$$U = 2x$$
$$dU = 2dx$$
$$= \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^U dU = \frac{1}{2}e^U + c = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

2) חשב:

$$\int xe^{-x^2} dx =$$

אם נציב:

$$U = -x^2$$
$$dU = -2xdx$$
$$-\frac{dU}{2} = xdx$$

$$= -\frac{1}{2}\int dUe^U = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

כאן היה לנו מקרה של פונקציה המוכפלת בדפרנציאל של המעריך של הפונקציה.

3) חשב:

$$\int \frac{e^{3x} dx}{1+e^x} =$$

שים לב:

$$\frac{y^3}{1+y} = y^2 - y + \frac{y}{y+1}$$

$$= \int \left(e^{2x} - e^x + \frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln\left(1 + e^x\right) + c$$

4) חשב:

$$\int e^{\sin y} \cos y dy =$$

אם נציב:

$\sin y = U$

$\cos y dy = dU$

$$= \int e^U dU = e^U + c = e^{\sin y} + c$$

5) חשב:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 6}} =$$

אם נציב:

$e^x + 6 = U$

$e^x dx = dU$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{U}} = \int U^{-\frac{1}{2}} dU = 2U^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x + 6} + c$$

9.5 הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

כתבנו האנטגרלים המיידים.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + c$$

נראה עתה עוד אנטגרל חשוב לצורך זה נגזור את הפונקציה $y = arc\sec x$

כלומר:

$$x = \sec y = \frac{1}{\cos y}$$

נגזור את שני האגפים של המשואה לפי x.

$$1 = -\frac{(-\sin y)}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = tgy \cdot \sec y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tgy \sec y}$$

אבל:

$$tgy = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

לכן:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx = arc\sec x + c$$

נחשב:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

נציב:

$$\frac{x}{a} = U$$

$$\frac{dx}{a} = dU$$

$$dx = adU$$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{1-U^2}} = \arcsin U + c = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c}$$

כ"כ:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} =$$

$$dU = \frac{dx}{a}$$

$$\frac{x}{a} = U$$

$$dx = adU$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dU}{1+U^2} = \frac{1}{a} arctgU + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{x \cdot a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} =$$

$$\frac{x}{a} = U$$

$$\frac{dx}{a} = dU$$

$$= \int \frac{dU}{aU\sqrt{U^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{dU}{U\sqrt{U^2-1}} = \frac{1}{a} arc\sec U + c$$

$$\boxed{\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec \frac{x}{a} + c}$$

דוגמאות:

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}} =$$

אם נציב:

$$U = 5x$$

$$dU = 5dx$$

$$\frac{dU}{5} dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dU}{\sqrt{16-U^2}} = \frac{1}{5}\arcsin\frac{U}{4} + c = \frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{4} + c$$

2)

$$\int \frac{dx}{11+7x^2} =$$

אם נציב:

$$U = \sqrt{7}x$$

$$dU = \sqrt{7}dx$$

$$\frac{dU}{7} = dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dU}{11+U^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} arctg\frac{U}{\sqrt{11}} + c = \frac{1}{\sqrt{77}} arctg\sqrt{\frac{7}{11}}x + c$$

3)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-49}} =$$

אם נציב:

$$2x = U$$

$$2dx = dU$$

$$dx = \frac{dU}{2}$$

נקבל:

$$= \int \frac{dU}{U\sqrt{U^2-49}} = \frac{1}{7} arc\sec\frac{U}{7} + c = \frac{1}{7} arc\sec\frac{2x}{7} + c$$

4)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} =$$

אם נציב:

$$x^3 = y$$
$$3x^2 dx = dy$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3}\arcsin y + c = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + c$$

5)

$$\int \frac{x}{x^4+3}dx =$$

אם נציב:

$$x^2 = y$$
$$2xdx = dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^3+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{y}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x^2}{\sqrt{3}} + c$$

6)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} =$$

אם נציב:

$$x+1 = U$$
$$dx = dU$$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{9-U^2}} = \arcsin\frac{U}{3} + c = \arcsin\frac{x+1}{3} + c$$

7)

$$\int \frac{x-7}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

אם נציב:

$$1-x^2 = U$$
$$-2xdx = dU$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dU}{\sqrt{U}} - 7\arcsin x + c = -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}U^{1/2} - 7\arcsin x + C$$
$$= -\left(1-x^2\right)^{1/2} - 7\arcsin x + c$$

9.6 דוגמאות עם שיטת השלמה לרבוע.

(1

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+7} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+3} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3} =$$

אם נציב:

$U = x+2$

$dU = dx$

$$= \int \frac{dU}{U^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{U}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{3}} + c$$

(2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\left[36-\left(x^2-8x+16\right)\right]^{1/2}} = \int \frac{dx}{\left[36-(x-4)^2\right]^{1/2}} =$$

אם נציב:

$U = x-4$

$dU = dx$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{36-U^2}} = \arcsin \frac{x-4}{6} + c$$

(3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(x^2-4x+4\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + c$$

(4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{21+12x-9x^2}} =$$

נפתח את הבטוי בתוך השורש

$$21+12x-9x^2 = 21-(9x^2-12x+4)+4 =$$

$$= 25-(9x^2-12x+4) = 25-(3x-2)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-(3x-2)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}} =$$

$3x-2 = y$

$3dx = dy$

$dx = \frac{dy}{3}$

$$= \frac{1}{3}\arcsin \frac{3x-2}{5} + c$$

(5

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+5} = \int \frac{3dx}{9x^2+12x+15} = 3\int \frac{dx}{(3x+2)^2+11} =$$

אם נציב:

$$3x = U$$
$$3dx = dU$$
$$= \int \frac{dU}{U^2+11} = \frac{1}{\sqrt{11}} arctgU = \frac{1}{\sqrt{11}} arctg\frac{3x+2}{\sqrt{11}} + c$$

(6

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{(x+1)dx}{(x-2)^2+4} = \int \frac{x-2+3}{(x-2)^2+4}dx = \int \frac{(x-2)}{(x-2)^2+4}dx + 3\int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx$$

נביא את המונה לצורה של נגזרת המכנה.
באנטגרל הראשון אם נציב:

$$U = (x-2)^2+4$$
$$dU = 2(x-2)dx$$

כלומר המונה דפרנציאל של המכנה.

$$x-2 = y$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dU}{U} + 3\int \frac{1}{y^2+4}dy = \frac{1}{2}\ln U + \frac{3}{2}arctg\frac{y}{2} + c = \frac{1}{2}\ln\left[(x-2)^2+4\right] + \frac{3}{2}arctg\frac{x-2}{2} + c$$

(7

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$$

נביא את המונה לצורה שיהיה בו הדפרנציאל מתחת לשורש.

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

אם נציב:

$$y = 5-4x-x^2$$
$$dy = (-4-2x)dx$$
$$5-4x-x^2 = 5-\left(x^2+4x+4\right)+4 =$$
$$= 9-\left(x^2+4x+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^{1/2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = -\frac{1}{2}\frac{y^{1/2}}{1/2} + 2\arcsin\frac{x+2}{3} + c = -\sqrt{5-4x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

לסכום:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}arc\sec\frac{x}{a}+c$$

לכן אנטגרל של הפונקציה שאפשר להביא לצורה זו. למען השלמות נוכל להוסיף כאן אנטגרלים.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c$$

לכן:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{x-a}{x+a}\right]+c$$

נוכל להוכיח אנטגרלים אלו ע"י גזירה של אגף ימין , בהמשך נראה איך לקבל אנטגרלים אלו.

דוגמאות:

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+25}} =$$

נציב:

$$U = 4x$$
$$dU = 4dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dU}{\sqrt{U^2+5^2}} = \frac{1}{4}\ln\left(U+\sqrt{U^2+5}\right)+c = \frac{1}{4}\ln\left(4x+\sqrt{16x^2+25}\right)+c$$

2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+5}} =$$

נכפיל ב $\sqrt{3}$ במונה ובמכנה:

$$= \sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+12x15}} = \sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(3x+2)^2+11}} =$$

$$U = 3x+2$$
$$dU = 3dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{dU}{\sqrt{U^2+11}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(U+\sqrt{U^2+11}\right)+c=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(3x+2+\sqrt{(3x+2)^2+11}\right)+c=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left((3x+2)+\sqrt{9x^2+12x+15}\right)+c$$

3) $$\int\frac{dx}{2x^2+5x-1}=2\int\frac{dx}{4x^2+10x-2}=2\int\frac{dx}{\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-2}=$$

$$=2\int\frac{dx}{(2x+\frac{5}{2})-\frac{33}{4}}=\int\frac{dU}{U^2-\frac{33}{4}}=\frac{1\cdot 2}{2\sqrt{33}}\ln\left(\frac{U-\frac{\sqrt{33}}{2}}{U+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right)+c=$$

$U=2x+\frac{5}{2}$

$dU=2dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{33}}\ln\left(\frac{24-\sqrt{33}}{24+\sqrt{33}}\right)+c=\frac{1}{\sqrt{33}}\ln\left(\frac{4x+5-\sqrt{33}}{4x-5+\sqrt{33}}\right)+c$$

9.7 אנטגרלים של פונקציות היפרבוליות.

$$\int\sinh xdx=\cosh x+c$$

$$\int\cosh xdx=\sinh x+c$$

$$\int\sec h^2 xdx=tghx+c$$

$$\int\csc h^2 xdx=-\coth x+c$$

$$\int tghxdx=\int\frac{\sinh x}{\cosh x}dx=\int\frac{1}{U}dU=\ln(\cosh x)+c$$

$\cosh x=U$

$\sinh xdx=dU$

$$\int\coth xdx=\ln(\sinh x)+c$$

דוגמאות:

1)

$$\int\cosh(2x)dx=\quad|2x=U;2dx=dU|\quad=\frac{1}{2}\int\cosh UdU=\frac{1}{2}\sinh 2x+c$$

2)

$$\int e^x\cosh xdx=\int e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(e^{2x}+1\right)dx=$$

$U=2x$

$dU=2dx$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{4}\int e^{U}dU+\frac{x}{2}+c=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{x}{2}+c$$