ב"ה

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.1

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^3 + y^2 x\right) dydx$

ב. $\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \left(16-\rho^2\right)^{1/2} \rho z d\rho dz d\theta$

2. **א.** חשב מפת כדור שרדיוסו R אם צפיפות מסתו פרופורציונלית ל- $\dfrac{x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

ב. מצא את מומנט ההתמדה של הכדור הנ"ל ביחס לציר Z.

3. חשב את החסום בין הגלילים $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ ובתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=16$.

4. חשב $\iint_R e^{-7/3 x} dxdy$ כאשר R הוא תחום המישור xy החסום ע"י הקווים $y=2x-1$, $y=2x+4$, $y=\frac{1}{4}x-2$, $y=\frac{1}{4}x+3$. העזר בטרנס': $u=y-2x$ $v=y-\frac{1}{4}x$.

5. חשב $\iiint_{(v)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$ כאשר (v) הוא הנפח של חלק הכדור (הקטן) בין המישור $z=a$ לכדור $x^2+y^2+z^2=4a^2$.

רמז: כתוב את משוואת המישור $z=a$ בקואורדינטות כדוריות באמצעות ρ, a ו- φ.

בהצלחה!

ב"ה
כ"ה תמוז, תשנ"ב
4 ביולי, 1994

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.2
(כולל פתרון)

1. פתור/י בעיות הבאות:

א. נתונה פונקציה: $z=\cos(xy)$ כאשר $y^3-2xy+xy^2=3$. חשב/י את $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dy},\frac{\partial z}{\partial y}$;

ב. נתונה המשוואה: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=x+y$. העביר/י אותה למשתנים t ו- s כאשר $x=t+s$ ו- $y=t-s$.

2. פתח/י לטור חזקות את הפונקציה:

א. $z=\exp(xy^2)$ סביב הנקודה: $y=0,\ x=0$;

ב. $z=\sinh(x-y)$ סביב הנקודה $y=0, x=1$.

3. חשב/י:

א. את האינטגרל $\iint_D \exp\left[-\left(x^2+y^2\right)^2\right]\left(x^2+y^2\right)dxdy$ כאשר D הוא החצי העליון של המישור $y>0$;

ב. את הקואורדינטות של מרכז הכובד של רבע של אליפסה $x^2/a^2+y^2/a^2=1$ בהנחה שצפיפות היא 1.

4. מצא/י:

א. $\iiint_T xyzdxdydz$ כאשר T הוא נפח של המקבילון המוגבל ע"י המישורים:

$z=8,\ z=5,\ y=4,\ y=2,\ x=1,\ x=0$;

ב. $\iiint_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$ כאשר V הוא נפח הכדור $x^2+y^2+z^2=a^2$.

בהצלחה!

ב"ה
כ"ה תמוז, תשנ"ב
4 ביולי, 1994

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.2

פתרון

1. א.

$$\frac{dy}{dx} \to 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + y^2 + x \cdot 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 2x + 2xy\right) = 2y - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - y^2}{3y^2 - 2x + 2xy}$$

ניתן לראות את y כמשתנה התלוי ב- x : $\quad ;y(x) \qquad z(x,y)$

עפ"י $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \to$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} = -x\sin(xy) - y\sin(xy) \cdot \frac{3y^2 - 2x + 2xy}{2y - y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(xy)\left(x + \frac{3y^2 - 2x + 2xy}{2 - y}\right) =$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(xy) \cdot \left(\frac{2x - xy + 3y^2 - 2x + 2xy}{2 - y}\right) = -\sin(xy) \cdot \frac{3y^2 + xy}{2 - y}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(xy)\frac{3y^2 + xy}{2 - y}$$

בהתעלם מכל ש- y תלוי ב- x $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin(xy)$

ב.

$$x = t + s \quad ; \quad y = t - s$$

$$t = x - s = x + y - t$$

$$t = \frac{x + y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$$s = x - t = x - \frac{x + y}{2} = \frac{x - y}{2} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{1}{2} \qquad t=\frac{x}{2}+\frac{y}{2} \qquad s=\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial s}\right)=t+s+t-s$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=2t$$

2. א.

$$z=e^{xy^2}$$

$$z_{(0,0,)}=1$$

$$z_x\Big|_{0,0}=y^2e^{xy^2}\Big|_{0,0}=0$$

$$z_y\Big|_{0,0}=2xye^{xy^2}\Big|_{0,0}=0$$

$$z_{xx}\Big|_{0,0}=y^4e^{xy^2}\Big|_{0,0}=0$$

$$z_{xy}\Big|_{0,0}=2ye^{xy^2}\Big|_{0,0}+y^2\cdot 2xye^{xy^2}\Big|_{0,0}=0$$

$$z_{yy}\Big|_{0,0}=2x\left[e^{xy^2}+y\cdot 2xye^{xy^2}\right]_{0,0}=0$$

$$z_{xxx}\Big|_{0,0}=y^6e^{xy^2}\Big|_{0,0}=0$$

$$z_{xxy}\Big|_{0,0}=4y^3e^{xy^2}\Big|_{0,0}+y^4\cdot 2xye^{xy^2}\Big|_{0,0}=0$$

$$z_{xyy}\Big|_{0,0}=2\left[e^{xy^2}+y\cdot 2xye^{xy^2}\right]_{0,0}+2x\left[3y^2e^{xy^2}+y^3\cdot 2xye^{xy^2}\right]_{0,0}=2$$

$$z_{yyy}\Big|_{0,0}=2x\cdot 2xye^{xy^2}\Big|_{0,0}+4x^2\left[2ye^{xy^2}+y^2\cdot 2xye^{xy^2}\right]_{0,0}=0$$

$$f_{xxxx}\Big|_{0,0}=f_{yyyy}\Big|_0=0 \qquad f_{xxxxx}\Big|_{0,0}=f_{yyyyy}\Big|_0=0$$

$$f_{xxxy}\Big|_{0,0}=0 \qquad f_{xxxxy}\Big|_{0,0}=0$$

$$f_{xxyy}\Big|_{0,0}=0$$

$$f_{xyyy}\Big|_{0,0}=0$$

$$z=e^{xy^2}=1+\frac{1}{3!}\cdot 2\cdot 3\cdot xy^2+\ldots=1+xy^2+\ldots$$

כנראה ניתן לפתח את e^{xy^2} לפי e^u [כאשר סביב הנקודה (0,0)]

$$e^{xy^2}=1+xy^2+\frac{1}{2}\left(xy^2\right)^2+\frac{1}{3!}\left(xy^2\right)^3+\ldots$$

אך פיתוח מסוג זה לא נלמד בכיתה.

ב.

$$z=\sinh(x-y) \qquad y=0\ ;\ x=1$$

$$z_{(1,0)}=\frac{e+\frac{1}{e}}{2} \qquad \sinh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$z_x\Big|_{1,0}=\cosh(x-y)\Big|_{1,0}=\frac{e-\frac{1}{e}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$z_y\Big|_{1,0}=-\cosh(x-y)\Big|_{1,0}=-\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xx}\Big|_{1,0}=\sinh(x-y)\Big|_{1,0}=\frac{e+\frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{yy}\Big|_{1,0}=\sinh(x-y)\Big|_{1,0}=-\frac{e+\frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xy}\Big|_{1,0}=-\sinh(x-y)\Big|_{1,0}=-\frac{e+\frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xxx}\Big|_{1,0}=\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{yyy}\Big|_{1,0}=-\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$$

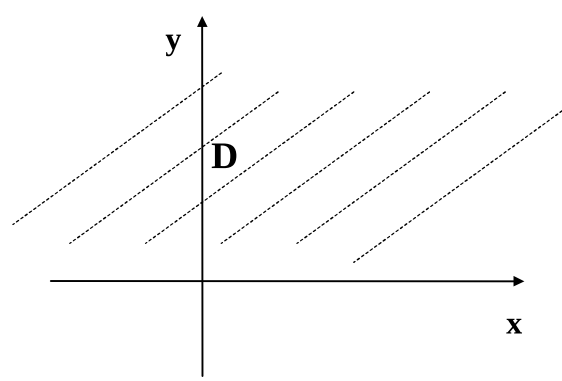
$$z_{xxy}\Big|_{1,0}=-\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xyy}\Big|_{1,0}=\frac{e-\frac{1}{e}}{2}$$

$$\sinh(x-y)=\frac{e+\frac{1}{e}}{2}+\frac{e-\frac{1}{e}}{2}(x-1)-\frac{e-\frac{1}{e}}{2}y+\frac{1}{2!}\left[\frac{e+\frac{1}{e}}{2}(x-1)^2-2\cdot\frac{e+\frac{1}{e}}{2}(x-1)y+\frac{e+\frac{1}{e}}{2}y^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{e-\frac{1}{e}}{2}(x-1)^3-3\frac{e-\frac{1}{e}}{2}(x-1)^2y+3\frac{e-\frac{1}{e}}{2}(x-1)y^2-\frac{e-\frac{1}{e}}{2}y^3\right]+\ldots.$$

3. א.



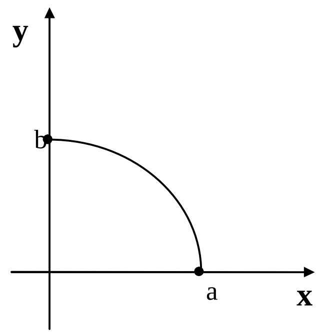
$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^4}\cdot r^2rdrd\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^4}\cdot r^3drd\theta=$$

$$u=r^4$$
$$du=4r^3dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-u}\cdot dud\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\Big[-e^{-u}\Big]_0^{\infty}d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{\pi}{4}$$

ב.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

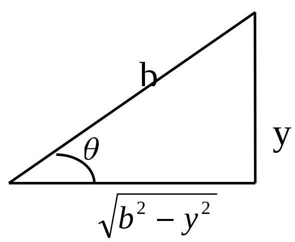
$$M=\int_0^b\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy=a\int_0^b\sqrt{1-\tfrac{y^2}{b^2}}dy=$$

$$M=\frac{a}{b}\int_0^b\sqrt{b^2-y^2}\,dy=\frac{a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\cos\theta\cdot b\cos\theta\,d\theta=$$

$$M=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2\theta\right)d\theta=$$

$$M=\frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0\right]=\frac{ab\pi}{4}$$

$$y=b\sin\theta$$
$$dy=b\cos\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{b^2-y^2}=b\cos\theta$$



$$\bar{x}=\int_0^b\int^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}ydxdy=\frac{a}{b}\int_0^b\sqrt{b^2-y^2}\cdot ydy=-\frac{a}{2b}\int_{b^2}^{0}\sqrt{n}dn=-\frac{a}{2b}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}}\Big|_{b^2}^{0}=\frac{ab^2}{3}$$

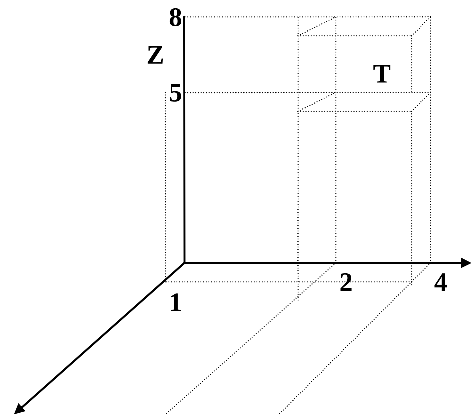
$$u=b^2-y^2$$
$$du=-2ydy$$

$$M_{\bar{x}}=\frac{\left(\frac{ab^2}{3}\right)}{\left(\frac{ab\pi}{4}\right)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\pi}$$

$$\bar{y}=\int_0^b\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}xdxdy=\frac{a^2}{2}\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{a^2}{2}\left[y-\frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b=\frac{a^2}{2}\left[b-\frac{b}{3}\right]=\frac{a^2b}{3}$$

$$M_{\bar{y}}=\frac{\left(\frac{a^2b}{3}\right)}{\left(\frac{ab\pi}{4}\right)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}$$

4. א.



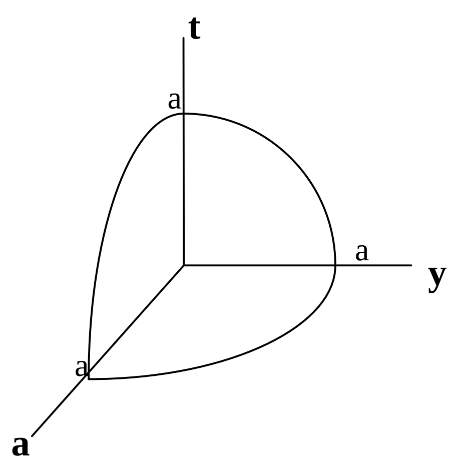
$$\iiint_T xyzdxdydz$$

$$\int_5^8\int_2^4\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz=$$

$$\int_5^8\int_2^4 \left.\frac{x^2yz}{z}\right|_0^1 dydz=\int_5^8\int_2^4\frac{yz}{2}dydz=$$

$$\frac{1}{4}\int_5^8 y^2z\Big|_2^4 dz=\frac{1}{4}\int_5^8(16-4)zdz=3\int_5^8 zdz=3\frac{z^2}{z}\Big|_5^8=\frac{3}{2}[64-25]=\frac{117}{2}$$

ב.



$$\iiint_v \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$dxdydz\to\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\frac{\rho^2\sin\phi}{\rho^2}d\rho\,d\phi\,d\theta=$$

$$8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\;d\phi\,d\theta=$$

$$8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos\phi\Big|_o^{\frac{\pi}{2}}d\theta=$$

$$8a\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi a$$

ב"ה
23 ביוני, 1995

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.3

1. פתור/י בעיות הבאות:

א. נתון $z=\frac{1}{4}\sqrt{12-x^2-y^2}$ ו- $\sin y+y=\ln x+x$. חשב/י את $\frac{dz}{dx}$;

ב. נתונה הפונקציה: $z=\frac{1}{3}x^3+2y^2x-9x-\frac{2}{3}y^3+12$. מצא/י נקודות קיצוניות.

2. פתור/י בעיות הבאות:

א. נתונה המשוואה: $\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial t}=s+t$. העביר/י אותה למשתנים t ו- s כאשר $t=x+y$ ו- $s=x-y$;

ב. חשב/י $\iint_A \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$ כאשר A הוא כל המישור מחוץ למעגל $x^2+y^2=1$.

3. פתור/י בעיות הבאות:

א. פתח/י לטור פורייה את הפונקציה המחזורית הבאה:

$$y=\begin{cases}-1 & -1<x<0\\ 1/2 & 0<x<1\end{cases}$$

ב. חשב/י את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $\phi=y^2x+x+xy$ בנקודה $(1,0,-1)$ בכיוון $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

4. חשב/י:

א. האינטגרל $\iiint_V e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$

כאשר V הוא הנפח התחום ב- $0\le x<\infty$, $0\le y<\infty$, $0\le z<\infty$;

ב. הנפח הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=9$ ובין המישורים $z=x$ ו- $z=10$.

בהצלחה!

ב"ה
9 ביוני, 1996

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.4

1. פתור/י בעיות הבאות:

א. נתון: $\frac{z}{x}=F\left(\frac{y}{x}\right)$. הראה/י ש- $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ לכל פונקציה F גזירה.

ב. נתונה הפונקציה: $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$. הוכח ש- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ לכל פונקציות φ ו- ψ גזירות.

2. פתור/י בעיות הבאות:

א. מצא/י נקודות קיצוניות לפונקציה: $z=x^3y^2(a-x-y)$.

ב. פתח/י לטור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ את הפונקציה $y=x^2$.

3. חשב/י את:

א. האינטגרל: $\iint_A\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$ כאשר A היא פנים המעגל $x^2+y^2=a^2$.

ב. נפח הגוף המוגבל על ידי קליפה כדורית $x^2+y^2+z^2=4$ ומשטח מוגדר על ידי $x^2+y^2=3z$.

4. חשב/י את:

א. האינטגרל $\int_C\bar{F}\cdot d\bar{x}$ כאשר $\bar{F}=(x-z)\bar{i}+(1-xy)\bar{j}+y\bar{k}$ ו- C הם המסלולים הבאים (I) קו ישיר מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ (II) הקו $z=t^2,\ y=t,\ x=t^3$ בין $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$;

ב. $\int_A^B(x^2+xy^2)dx+(x^2y+3y^2)dy$ כאשר $A(-1,0)$ ו- $B\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ הם נקודות על מעגל $x^2+y^2=1$.

בהצלחה!

ב"ה
6 באוקטובר 1966

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.5

1. בדוק/י את ההתכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)^{2/3}+(x-1)^{3/2}}$

ב. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x^2}{x^3}dx$

ג. $\int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+\ln^2 x}$

ד. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x^3}{x^3}dx$

2. חשב/י את האינטגרל הכפול: $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+1\right)}$

3. חשב/י את מסתו של חרוט אינסופי שצפיפותו e^{-z^3} ושמשואתו $z^2=x^2+y^2$.

4. מצא/י את הנפח בין המשטח $z=x+y$ לבין חלק המישור $z=0$ הנחתך על ידי שני הקווים $y=x^2$ ו- $x^2+y=1$.

בהצלחה!

ב"ה
13 ביוני 1997

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.6

(כולל פתרון)

1. מצא את ...

א. השטח המוגבל על ידי למניסקאטה $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

ב. הנפח הנחתך על ידי הגליל $x^2+y^2=Rx$ מכדור $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

2. חשב את ...

א. האינטגרל $\iiint dxdydz$ אם תחום האינטגרציה מוגבל על ידי מישורים $z=0,\ y=0,\ x=0$ ו- $x/a+y/b+z/c=1$

ב. הנפח מוגבל על ידי משטח $x^2+y^2+z^2=az$ בעזרת אינטגרלים והסבר את תשובותך.

3. חשב את ...

א. טור פורייה של פונקציה $f(x)=|x|$ על קטע $-\pi\le x\le\pi$.

ב. סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/(2n-1)$ בעזרת פיתוח לטור פורייה פונקציה $f(x)=x$ על קטע $-\pi<x\le\pi$.

4. חשב את ...

א. הנגזרת של הפונקציה $\varphi=3xy^2+2y^3z-x^2z$ בכיוון $\bar{u}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$.

ב. הכיוון בו הנגזרת של הפונקציה הנ"ל היא מכסימלית ואת גודלה בכיוון זה.

בהצלחה!

ב"ה
13 ביוני 1997

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.6

פתרון

1. א. בקואורדינטות פולריות:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x^2+y^2 = r^2$$
$$r^2 = 2a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta \Rightarrow r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}$$
$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos\theta}} r dr d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cdot 2\cos 2\theta\, d\theta = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta =$$
$$= 8a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2\sin\frac{\pi}{2} = 4a^2$$

השטח המוגבל על ידי המניסקאות שווה $4a^2$.

ב.

$$x^2+y^2 = Rx$$
$$x^2+y^2+z^2 \le R^2$$

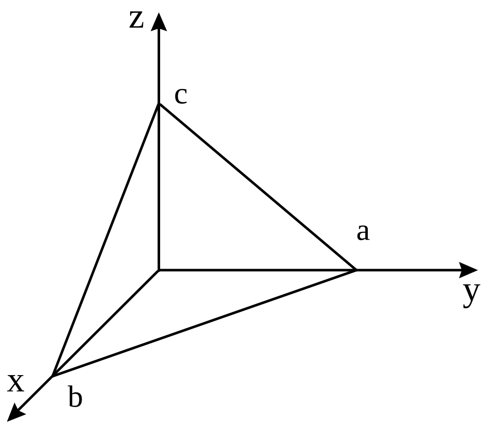
בקואורדינטות גליליות:

$$r^2 = Rr\cos\theta \Rightarrow r = R\cos\theta$$
$$r^2+z^2 \le R^2$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta}\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} r dz dr d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2-r^2}\, dr d\theta =$$
$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\theta} d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((R^2-R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-R^3)d\theta =$$
$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\left[\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2}-1\right] = -\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3-1)d\theta =$$

$$= -\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta - 1\right]d\theta = -\frac{4}{3}R^3\left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta - \theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{4}{3}R^3\left(-\frac{\pi}{2}+1-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right)R^3$$



.2 **א.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$$\int_0^a\int_0^{b-\frac{bx}{a}}\int_0^{c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}} dzdydx$$

הפונקציה התלת מימדית : $z=\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)c$

על מישור x,y. : $y=\left(1-\frac{x}{a}\right)b$

$$\int_0^{b-\frac{bx}{a}}\left(c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}\right)dy = cy-\frac{cxy}{a}-\frac{cy^2}{2b}\Bigg|_0^{b-\frac{bx}{a}} =$$

$$= c\left(b-\frac{bx}{a}\right)-\frac{cx}{a}\left(b-\frac{bx}{a}\right)-\frac{c}{2b}\left(b-\frac{bx}{a}\right)^2 =$$

$$= cb-\frac{cbx}{a}-\frac{cbx}{a}+\frac{cbx^2}{a^2}-\frac{c}{2b}\left(b^2-\frac{2b^2x}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^a\left(cb-\frac{2cbx}{a}+\frac{cbx^2}{a^2}-\frac{cb}{2}+\frac{2cbx}{2a}-\frac{cbx^2}{2a^2}\right)dx =$$

$$= cbx-\frac{2cb}{a}\frac{x^2}{2}+\frac{cb}{a^2}\frac{x^3}{3}-\frac{cbx}{2}+\frac{cb}{a}\frac{x^2}{2}-\frac{cb}{2a^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a =$$

$$= cba-cba+\frac{cba}{3}-\frac{cba}{2}+\frac{cba}{2}-\frac{cba}{6}=\frac{cba}{6}$$

ניתן לראות שזו פריזמה מכיוון שזה יוצא כמו 3/שטח בסיס* גובה

$\frac{a\cdot b}{2}\cdot\frac{c}{3}=\frac{abc}{6}$.

ב. מעבר לקואורדינטות כדוריות:

$$x^2+y^2+z^2=az$$

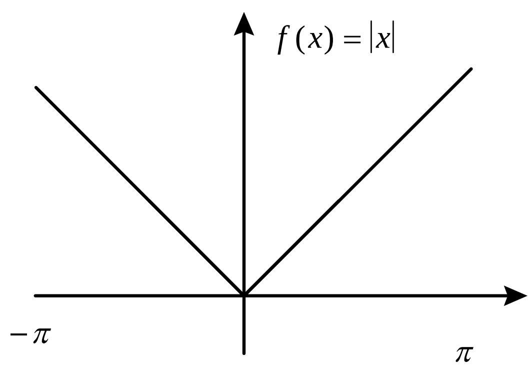
$$\rho^2=a\cdot\rho\cos\varphi$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\frac{a^3\cos^3\varphi\sin\varphi}{3}=\begin{Bmatrix}u=\cos\varphi\\ du=-\sin\varphi\,d\varphi\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^0-u^3du=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\left(-\frac{u^4}{4}\right)\Bigg|_1^0=\frac{a^3}{3\cdot4}\cdot2\pi=\frac{\pi a^3}{3\cdot2}$$

תוצאה זו היא נפח של כדור ברדיוס $\frac{a}{2}$ ואופן המשוואה הנ"ל היא משוואת כדור ברדיוס $\frac{a}{2}$ שמרכזו בנקודה $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.



3. **א.** זו פונקציה זוגית קלאסית
$|x|=|-x|$
ולכן היא תתבטא רק ע"י $b_n=0$
$\cos nx$ שהוא זוגי.
כדי להמנע מפעולות על $|x|$
הפכתי פונקציה זו ל- $f=-x$
כאשר x שלילי, $f=x$ כאשר x חיובי.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0-xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=-\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^0+\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}\right)+\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

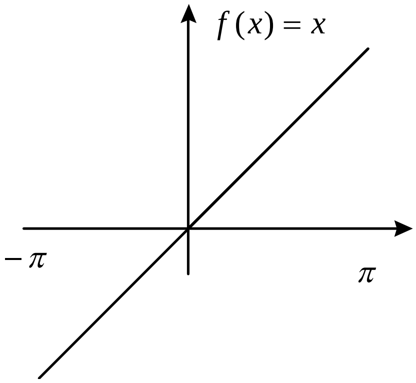
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0-x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\begin{Bmatrix}u=x & \cos nxdx=dv\\ du=dx & \frac{1}{n}\sin nx=v\end{Bmatrix}$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{x}{n}\sin nx\big|_{-\pi}^0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0\frac{1}{n}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\big|_{-\pi}^0=-\frac{1}{\pi n^2}(\cos0-\cos(-n\pi))=-\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^0\sin nxdx=\frac{1}{\pi n}(\cos(n\pi)-\cos0)=-\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$



זו פונקציה אי זוגית ולכן מבוטאת ע"י sin
בלבד שהוא אי זוגי. $a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{a\to-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx$$

מכיוון שהפונקציה לא כוללת את $(-\pi)$
כתבתי שהגבול שואף ל- $(-\pi)$.

$$u=x \quad \sin nxdx=dv$$

$$du=dx \quad -\frac{1}{n}\cos nx=v$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{a\to-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{a\to-\pi}^{\pi}\cos nxdx=-\frac{1}{\pi n}\Big(\pi\cos(\pi n)+\pi\cos(-\pi n)\Big)=$$

$$=\frac{-2\cos(\pi n)}{n}=\frac{-2(-1)^n}{n}$$

כאשר $x=\frac{\pi}{2}$:

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^n}{n}\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

הערכים של ה sin :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=1,0,-1,0\ldots \quad n=1,2$$

הסינוס מתאפס כל איבר שני וגם הופך סימן

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots\right)(-1)^{n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

וזה בדיוק הטור המבוקש.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

4. א.

$$\varphi=3xy^2+2y^3z-x^2z$$

$$\nabla\varphi=(3y^2-2xz)\bar{i}+(6xy+6y^2z)\bar{j}+(2y^3-x^2)\bar{k}$$

$$\frac{d\varphi}{ds}\bigg|_{i+2j-2k}=\nabla\varphi\,\frac{\left(i,+2j,-2k\right)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{3}(3y^2-2xz+12xy+12y^2z-4y^3+2x^2)$$

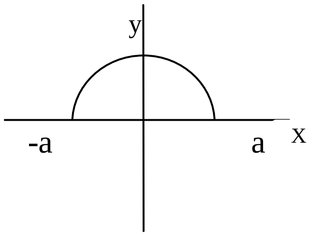
ב. הכוון בו הנגזרת היא מכסימלית הוא כיוון הגרדיאנט כפי שכתוב למעלה.
גודל הנגזרת המכסימלית:

$$\left|\nabla\varphi\right|=\sqrt{(3y^2-2xz)^2+(6xy+6y^2z)^2+(2y^3-x^2)^2}$$

ב"ה
26 ביוני, 1998
ב' תמוז, תשנ"ח

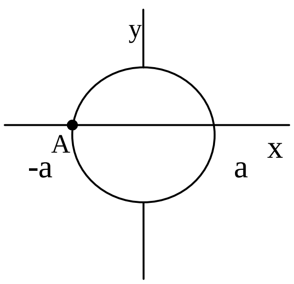
מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.7
(כולל פתרון)



1. **א.** חשב את העבודה שנעשית ע"י הכח $\overline{F} = y^2\bar{i} + xy\bar{j}$ לאורך מסלול חצי מעגל עליון של: $x^2 + y^2 = a^2$ מ- $x = -a$ ל- $x = a$. (ראה איור).

ב. אם הכח הוא $\overline{F} = y^2\bar{i} + 2xy\bar{j}$ מה תהיה העבודה לאורך המסלול הנ"ל?
מה תהיה העבודה לאורך כל המעגל, מנקודה A חזרה ל- A? (ראה איור).



2. **א.** חשב את טור פורייה המיצג את הפונקציה:

$$y_1 = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 1 & -2 < x < -1\,, \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

ב. בעזרת א' חשב את טור פורייה של הפונקציה $y = y_1 + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + 2\cos\frac{\pi x}{2}$

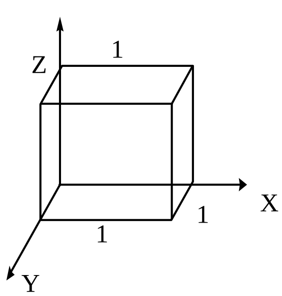
3. **א.** פתור את המשוואה: $y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^3}$

ב. קצב הגידול בריכוז של אוכלוסיה $\frac{d\rho}{dt}$ פרופורציונלי ל- $\rho\,(1-\rho)$.
בשנה מסוימת (t=0) כאשר הריכוז היה $\rho = 0.3$ קצב הגידול היה 0.1 . חשב כעבור כמה שנים יהיה ריכוז האוכלוסיה $\rho = 0.53$.

4. **א.** נתון נוזל בעל צפיפות ρ שיש לו מהירות נקודתית $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$.

I. חשב את כמות הנוזל העובר דרך יחידת שטח ליחידת זמן על משטח הניצב לוקטור $\bar{u} = y^2\bar{i} - x\bar{j}$.

II. חשב את כמות הנוזל נטו היוצאת ביחידת זמן מקובייה הנמצאת ב- $x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0$ (ראה איור).



ב. פתור את המשוואה $\frac{dy}{dx} + \frac{\sin y + x^2}{x\cos y + 2y} = 0$.

בהצלחה!

ב"ה
26 ביוני, 1998
ב' תמוז, תשנ"ח

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.7

פתרון

1. **א.** $w=\int \overline{F}.d\overline{r}=\int y^{2}dx+xydy=\int_{-a}^{a}\left(a^{2}-x^{2}\right)dx-\int_{-a}^{a}x^{2}dx=\frac{2}{3}a^{3}$

ב. $w_{1}=\int_{-(a,0)}^{(a,0)}y^{2}dx+2xydy=0$

כי $y=0$

עבודה משמרת $w_{2}=0:\frac{\partial Fx}{\partial y}=\frac{\partial Fy}{\partial x}$

2. **א.**

$b_{n}=0 \qquad a_{o}=\frac{3}{2}$

$a_{n}=\frac{4}{n^{2}\pi^{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)$

$y_{1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{a_{o}}{2}$

ב.

$b_{1}=\frac{1}{2}$

$a_{1}=-\frac{4}{n^{2}\pi^{2}}+2$

3. **א.**

$$y^3 y' + \frac{y^4}{x} = x^2$$

הצבה: $s = y^4$

$$y^4 = \frac{4x^3}{7} + \frac{c}{x^4}$$

ב.

$$\frac{\rho}{1-\rho} = Ae^{0.476t} \Rightarrow t = 0 \quad \rho = 0.3 \Rightarrow A = 0.428$$

$t =$ 2.03 שנים

4. **א.**

$$\bar{V} = \rho \ \bar{v}$$

$$\bar{V}.\bar{v} = \rho \ \bar{u}.\bar{n} = \frac{xy^2 - xy}{\sqrt{y^4 + x^2}}$$

$$\iiint_v \bar{\nabla}.\bar{V} dv = \oiint \bar{V}.d\bar{s}$$

$$\bar{\nabla}.\bar{V} = \frac{\partial \ x}{\partial \ x} + \frac{\partial \ y}{\partial \ y} = 2$$

ב. משוואה מדויקת, פתרון:

$$x \sin y + \frac{1}{3}x^3 + y^2 = const$$