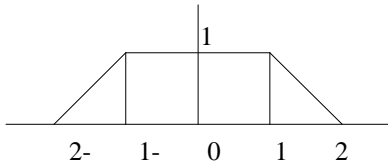


## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.1



1. פתח לטור פורייה את פונ' הגל הטרפזי שבאיור

א. באמצעות פונ' טריגונומטריות.

ב. באמצעות טור מרוכב.

2. נתון המשטח:  $T = x^2 yz^2 - xy + z = 1$

א. מצא מישור משיק למשטח דרך הנקודה  $(1, 1, -1)$ .

ב. מצא את משוואת אנך למשטח דרך הנקודה  $(1, 0, 2)$ .

3. א. מצא מישור שעובר דרך  $P(3, 0, 1)$  ומאונך לקו חתוך המישורים  $3x - 3y + 4z = 5$ ,  $x + 2y - 3z = 6$ .

ב. מצא את המרחק בין הקווים  $x = \frac{y-2}{3} = z$ ,  $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ .

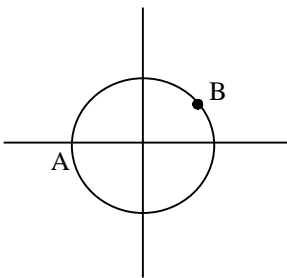
4. א. חשב  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  כאשר  $\vec{F} = (x-z)\vec{i} + (1-xy)\vec{j} + y\vec{k}$  ו-  $C$  הם המסלולים הבאים:

I. קו ישר מ-  $(0, 0, 0)$  ל-  $(1, 1, 1)$ .

II. הקו  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  בין  $(0, 0, 0)$  ל-  $(1, 1, 1)$ .

ב. חשב  $\int_A^B (2x + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy$  כאשר  $A(-1, 0)$  ו-  $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

הן נקודות על מעגל  $x^2 + y^2 = 1$  (ראה איור).



**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.2

פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. (x^2 - 1)dy = (e^x - 2xy)dx$$

$$2. (t + 2s)dt + 2(t + 4s)ds = 0$$

3. מצא פתרון פרטי של המשוואה הבאה העובר דרך (1,1) :  $y'x = y \ln y - y \ln x + y$

$$4. \text{ פתור: } (4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

$$5. \text{ פתור: } -3 + y - x \frac{dy}{dx} = 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 5 \frac{dy}{dx}$$

$$6. \text{ פתור: } \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$$

**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.3

פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. \quad \frac{ds}{dt} = \frac{2s + t - 1}{s - t + 2}$$

$$2. \quad (x^2 - 1)dy = (e^x - 2xy)dx$$

$$3. \quad y'x = y \ln y - y \ln x + y$$

$$4. \quad (4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

$$5. \quad -3 + y - x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$6. \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$$

**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.4

1. חשב מסת כדור שרדיוסו R אם צפיפות מסתו שווה ל-  $\frac{x^2 e - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

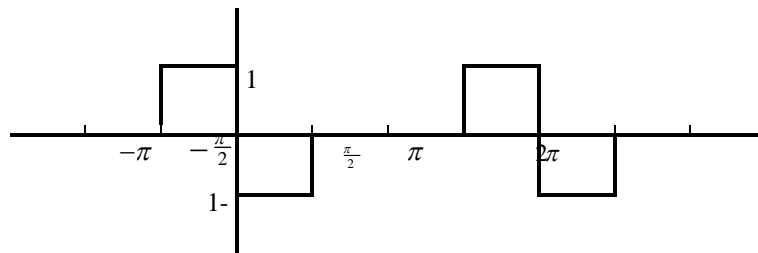
2. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + 3y - 2}$

3. פתור את המשוואה:  $xy^2 \ln x dy + (y^3 - \ln x) dx = 0$

4. פתור את המשוואה:  $(4x^2 y^3 - 2y) dx + (3x^3 y^2 - x) dy = 0$

5. פתור את המשוואה:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$

6. פתח לטור פורייה את הפונקציה:



**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.5

1. א. מצא פתרון פרטי של המשוואה  $(x - \sqrt{xy})dy - ydx = 0$  המקיים תנאי התחלה  $x = 4, y = 1$ .

ב. פתור את המשוואה:  $(y')^3 + xy' - y = 0$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = y \ln x - 1$

ב.  $xe^{x+y} dx + e^{2y-x} dy = 0$

3. פתור את המשוואות:

א.  $\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x} + x$

ב.  $\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} = e^y \frac{dy}{dx}$

4. א. פתור את המשוואה:  $(y + y \ln x)dx + \left(x \ln x + \frac{\ln y}{y}\right)dy = 0$

ב. נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור  $2\pi$  כאשר נתון מחזור אחד בין  $-\pi$  עד  $\pi$

באופן הבא:  $f(x) = x^2 \quad -\pi < x < \pi$

I. תאר גרפית מספר מחזורים של הפונקציה.

II. פתח את הפז' לטור פורייה בפונקציות טריגונומטריות.

**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.6

פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. \frac{ds}{dt} = \frac{2s + t - 1}{s - t + 2}$$

$$2. (x^2 - 1)dy = (e^x - 2xy)dx$$

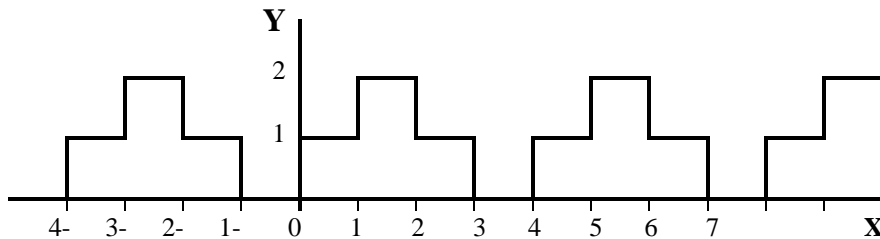
3. מצא פתרון פרטי של המשוואה הבאה העובר דרך (1,1) :  $y'x = y \ln y - y \ln x + y$

4. פתור את המשוואה :  $(y^2 - y)\cos x + y' = 0$

$$5. \text{ פתור : } -3 + y - x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$6. \text{ פתור : } \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$$

7. פתח לטור פורייה את הפונ' המחזורית הבאה:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 1 & 2 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 4 \end{cases}$$

א. בעזרת פונ' טריגונומטריות.

ב. בעזרת פונ' אקספוננציאליות.

**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

## מבחן 5.7

1. חשב את האינטגרל הכפול: 
$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 1)}$$

2. חשב את מסתו של חרוט אינסופי שצפיפותו  $e^{-z^3}$  ומשוואתו  $z^2 = x^2 + y^2$ .

3. מצא את הנפח בין המשטח  $z = x + y$  לבין חלק המישור  $z = 0$  הנחתך ע"י שני

הקווים  $x^2 + y = 1$ ,  $y = x^2$ .

4. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $xy' - y^2 = 1$

ב.  $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$

ג.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + y^2}{\cos y - 2xy}$

ד.  $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$

**בהצלחה!**

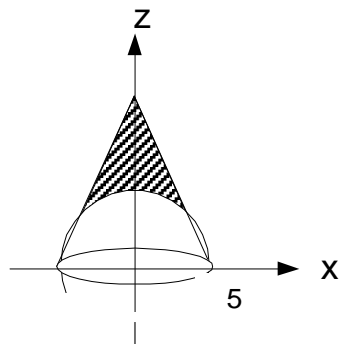
## מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.8

$$1. \text{ א. חשב: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$2. \text{ ב. החרוט שמשואתו } \left(5 - \frac{z}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 \text{ חותך את הכדור שמשואתו } x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

חשב את הנפח של קצה החרוט הבולט מתוך הכדור:

באיור המצורף ציר  $y$  מאונך לדף.

2. פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. \text{ א. } ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$$

$$2. \text{ ב. } y' = y \tan x + \cos x$$

$$3. \text{ ג. } -(\cos y + y \cos x)dx = (\sin x - x \sin y)dy$$

בהצלחה!



**מתמטיקה לפיזיקאים**מועד מיוחד  
5.9

1. בדוק את ההתכנסות או ההתבדרות של האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x^2}{x^3} dx \quad \text{ב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{3/2}} \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x^3}{x^3} dx \quad \text{ד.} \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + \ln^2 x} \quad \text{ג.}$$

$$2. \text{ חשבי את האינטגרל הכפול: } \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 1)}$$

3. חשבי את מסתו של חרוט אינסופי שצפיפותו  $e^{-z^3}$  ושמשואתו  $z^2 = x^2 + y^2$ .4. מצאי את הנפח בין המשטח  $z = x + y$  לבין חלק המישור  $z = 0$  הנחתך על ידי שני

$$\text{הקווים } y = x^2 \text{ ו- } x^2 + y = 1.$$

**בהצלחה!**

## מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.10

1. קבע את הסדר ואת המעלה של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2dy}{dx} - 3y = 4 \sin x - 2 \cos x \\ \text{ב.} & \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \text{ג.} & (x - y)dx + xdy = 0 \\ \text{ד.} & \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0 \end{array}$$

2. הראה כי:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \sin x \quad \text{פותר את 1a.} \\ \text{ב.} & y = \sin(x + c) \quad \text{פותר את 1b.} \\ \text{ג.} & \frac{y}{x} = -\ln kd + c \quad \text{פותר את 1c.} \\ \text{ד.} & h(x^2 + y)^3 - (2x^3 + 3xy + c)^2 = 0 \quad \text{פותר את 1d.} \end{array}$$

3. פתור את המשוואות הבאות בעזרת הפרדת משתנים:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & du + utgvdv = 0 & \text{ב.} \quad (1 - y^2)xdx + y(1 + x^2)(1 + y^2)dy = 0 \\ \text{ג.} & xe^{x+2y} + \frac{dy}{dx} = 0 \end{array}$$

4. פתור את המשוואות ההומוגניות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & (x - y)ydx - x^2 dy = 0 \\ \text{ב.} & ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0 \\ \text{ג.} & (hx^2 + 3xy + y^2)dx + (hy^2 + 3xy + x^2)dy = 0 \end{array}$$

5. פתור את המשוואות הבאות ע"י מעבר למשוואות ההומוגניות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & (2x - y + h)dy + (x - 2y + 5)dx = 0 \\ \text{ב.} & y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y} \\ \text{ג.} & y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3} \end{array}$$

בהצלחה!

## מתמטיקה לפיזיקאים - מבחן 2

פרופ' שלמה הבלין

זמן בחינה - שעתיים

חומר עזר - מחשב כיס ללא גרפיקה

1. פתור את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{dx}{(13-6x+x^2)^{7/2}}$       ב.  $\int \frac{x^3 dx}{x^3-3x+2}$

2. א. חשב:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{e^{ax^2} + e^{-ax^2}}$

ב. מצא את הנפח הנוצר ע"י סבוב השטח הכלוא בין הפרבולות:  $y = 4 - x^2$  ו-  $y = 5 - 2x^2$  סביב ציר  $x$ .

3. בדוק האם האינטגרלים והטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים? נמק!

א.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4 - 16)^{3/2}}$       ב.  $\int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos^2 x)^{3/4}}{x^2} dx$

ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$       ד.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln(n)}}$

4. א. פתח את הפונקציה  $y = \cos^2 x \sin x$  לטור חזקות ב-  $x$  עד חזקה שלישית ב-  $x$ .

ב. הפוך את האינטגרל  $\int_0^m \frac{\sin(x^3)}{x} dx$  לטור אינסופי ב-  $m$ .

חשב בקרוב את האינטגרל עבור  $m = 1$ . מהי השגיאה בחישובך?

ג. נתון הטור  $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ . חשב בעזרתו את ערך הטור האינסופי:

$$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \dots$$

**בהצלחה!**